

# Lineare Analyse von Spiralwirbel-Strukturen im Taylor-Couette System

Diplomarbeit  
von  
Sebastian Altmeyer

Fachbereich Physik  
Universität des Saarlandes

24. Juli 2007

II

**Sebastian Altmeyer:** *Lineare Analyse von Spiralwirbel-Strukturen  
im Taylor-Couette System* , Diplomarbeit Universität des Saarlandes, (24. Juli 2007)

## Danksagung

Ich möchte diese Stelle nutzen, um einigen Menschen zu danken:

- Meinen *Eltern* für die Unterstützung auf jedem Gebiet.
- Meinem ehemaligen Physik-Lehrer *Karl-Jürgen Nauheimer* (Robert-Schuman-Gymnasium, Saarlouis) für außergewöhnliches Engagement.
- Meinen ehemaligen Komilitonen *Jan Kruppenacker* und *Karsten Schwarz* für die gute Zusammenarbeit und Kameradschaft.
- Meinem guten Freund *Dr. Christian Hoffmann* für die ausgezeichnete Betreuung und Hilfe beim Erstellen der Arbeit.
- Herrn *Prof. Dr. Manfred Lücke*, dessen Anregungen, Kritik und Nachsicht wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.



Hiermit versichere ich an Eides statt, daß ich diese Arbeit selbst angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen verwendet habe.

Saarbrücken, den 24. Juli 2007

Sebastian Altmeyer



# Motivation und Einleitung

Die ersten Untersuchungen des *Taylor-Couette Systems* wurden bereits vor mehr als hundert Jahren gemacht, so dass sich unmittelbar die Frage aufdrängt, warum auch heute noch Interesse an der Untersuchung dieses 'alten' Systems besteht. Die ursprüngliche Idee des Ende des 19. Jahrhunderts von G.I.Taylor [13] beschriebenen Systems bestand in der experimentellen Bestimmung der Viskosität eines Fluids so wie der Bestätigung der hydrodynamischen Grundgleichungen.

Taylor fand zunächst eine rein azimutale Strömung bei niedrigen Rotationsfrequenzen, die sogenannte *Couette-Strömung*, und später bei höheren Rotationsfrequenzen die nach ihm benannten *Taylor-Wirbel*. Entscheidend hierbei war, dass er bereits deren Existenzbereich im Fall periodischer Randbedingungen theoretisch vorhersagen konnte. Somit wandelte sich das anfängliche Interesse auch recht bald hin zu einer Untersuchung verschiedener Strukturen und insbesondere deren Bifurkationsverhalten [19, 21]. Heute ist eine große Zahl dieser Strukturen [8, 17] bekannt, wie etwa *Spiralwirbel*, *wavyartige* Wirbel [12] bis hin zu chaotischen Strukturen [6].

Dahinter steht das Ziel des Verständnisses von in der Natur vorkommenden komplexen physikalischen, chemischen und biologischen Systemen auf Basis des Wissens, das man anhand relativ einfacher hydrodynamischer Systeme wie z.B. des *Taylor-Couette Systems* oder aber auch des *Rayleigh-Benard Systems* gewinnen kann.

Das *Taylor-Couette System* ist hierzu besonders geeignet, da sich in diesem Übergänge zwischen unterschiedlichen Strukturen deutlich einfacher als bei anderen beschreiben lassen [22, 23]. Zudem bietet es die Möglichkeit eines guten Vergleichs zwischen Numerik und experimentellen Ergebnissen [18], was der Bestätigung der Modelle dient.

Zusammengefaßt läßt sich festhalten, dass das Taylor-Couette System auch heute immer noch ein interessantes Modellsystem darstellt, um neue, grundlegende Erkenntnisse zur Strukturbildung in komplexen Systemen zu gewinnen.

Diese Arbeit befaßt sich mit der linearen und schwach nichtlinearen Analyse von Strukturen im Taylor-Couette Systems am Beispiel der  $M = \pm 2$  Spiralwirbel kurz L2-SPI bzw.

R2-SPI. Die Wichtigkeit der linearen Analyse besteht darin, dass sie mögliche Bifurkationsschwellen des vollen nichtlinearen Systems liefert und somit als Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen anzusehen ist.

In früheren Arbeiten wurde die lineare Analyse für Taylor-Wirbel [28, 29] und lineare Spiralen mit  $|M| = 1$  [30] bereits ausführlich durchgeführt. Nachdem in [12, 10, 11] auch entsprechende nichtlineare Strukturen untersucht wurden, ist die konsequente Fortsetzung sich nun mit  $M = \pm 2$  Spiralen zunächst im Rahmen der linearen Analyse zu befassen. Dieser kommt hierbei ein besonderes Interesse zu, da im Fall der 2-SPI neue, bislang nicht untersuchte Eigenschaften hervortraten.

Erste Erkenntnisse, die auf ein besonderes Verhalten dieser  $M = \pm 2$  Spiralen hinweisen sind bereits in der Diplomarbeit [10] zu finden. Dort wurden marginale Kurven gefunden, die für verschiedene Radienverhältnisse zwei Minima besaßen. Auch wenn an dortiger Stelle nicht weiter auf dieses Phänomen eingegangen wurde, so läßt sich doch bereits daraus auf eine komplexere Topologie der marginalen Eigenwertflächen schließen. Die konsequente Weiterführung der linearen Analyse ist die Betrachtung lokalisierter Wellenpakete bei leicht überkritischen Kontrollparametern, wie es in der vorliegenden Arbeit im Bezug auf Fronten geschieht. Auch hieraus ergeben sich überraschende und neue Implikationen für die einzelnen Stabilitätsbereiche der  $M = \pm 2$  Strukturen (2-SPI).

Im Wesentlichen läßt sich die hier vorliegende Arbeit in zwei Teile gliedern.

Im ersten Teil (**Kapitel 1 und 2**) wird zunächst die lineare Stabilitätsanalyse durch Überlagerung des Grundzustandes mittels kleiner Störfelder durchgeführt. Hierbei genügt es, die linearen Gleichungen mittels Shooting-Verfahrens aufzuintegrieren, um zwischen stabilen und instabilen Lösungen zu unterscheiden. Ergebnis sind die sogenannten kritischen Störungen, bei denen verschiedene Störungsmuster auftreten. Diese werden im Folgenden für Taylor-Wirbel und Spiralwirbel bei Variation der einzelnen Kontrollparameter diskutiert.

Der zweite Teil der Arbeit (**Kapitel 3, 4 und 5**) befaßt sich vorwiegend mit Spiralstrukturen mit der strukturbildenden Wellenzahl  $M = \pm 2$  im Parameterbereich kurz oberhalb der kritischen Werte. Anders als bei den kritischen Werten, hier handelt es sich um unendlich ausgedehnte Störungen, treten nun lokalisierte Störungen auf, die sich mit axialer Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  im System bewegen. Dies hat entscheidende Bedeutung bzgl. der Stabilität zur Folge, denn hieraus resultieren unterschiedliche Stabilitätsbereiche, in denen Lösungen absolut stabil, konvektiv- oder absolut instabil sind. Die Beschreibung dieser Wellenpakete erfolgt mittels Amplitudengleichungen, deren Koeffizienten der lineare Terme das Anwachsverhalten der Amplituden beschreiben. Sie werden für L2-SPI unter Durchfluss ausgewertet.

Darüberhinaus werden Stabilitätsbereiche, sowohl auf Grundlage der Ginzburg-Landau-Näherung aus den Ergebnissen der Analyse der Amplitudengleichungen, als auch mit Hilfe der Dispersionsrelation der linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen untersucht. Das Langzeitverhalten  $t \rightarrow \infty$  der auftretenden Integrale wird mittels Sattelpunktmethode analysiert. Grundlegend für die Unterscheidung der verschiedenen Stabilitätsbereiche ist die Un-

tersuchung der Frontgeschwindigkeiten. Im Bereich konvektiver Instabilität besitzen die Geschwindigkeiten beider Fronten einer lokalisierten Störung und die Gruppengeschwindigkeit das gleiche Vorzeichen. Dies ändert sich beim Überschreiten der konvektiv-instabilen Stabilitätsschwelle. Von nun an besitzen die Geschwindigkeiten beider Fronten verschiedene Vorzeichen, propagieren somit in unterschiedliche Richtungen und das System als Ganzes befindet sich im absolut instabilen Zustand.

Um die Wichtigkeit der, in diesen Kapiteln, gefundenen Resultate im Bezug auf L2-SPI nochmals hervorzuheben, werden die entscheidenden Ergebnisse am Ende eines jeden Kapitels in einem Resumé kurz zusammengefaßt.

Im Anhang sind die zur Berechnung verwendeten mathematischen Verfahren erläutert. Hierbei wird zunächst allgemein auf Randwertprobleme und das hier verwendete *Runge-Kutta-Verfahren* zu deren Lösungen eingegangen. Weiterhin wird das *Newton-Raphson-Verfahren* zur numerischen Nullstellenfindung, wie auch die *Sattelpunktmethode* zur näherungsweise Lösung von Integralen dargelegt.



# Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	IX
Abbildungsverzeichnis	XII
Tabellenverzeichnis	XVII
Symbolverzeichnis	XIX
<b>1 Das System</b>	<b>1</b>
1.1 Die hydrodynamischen Grundgleichungen . . . . .	1
1.2 Systemgeometrie . . . . .	1
1.2.1 Die Grundgleichungen . . . . .	2
1.2.2 Entdimensionalisierung . . . . .	3
1.3 Der Grundzustand . . . . .	4
1.3.1 Zirkulare Couette-Strömung <i>CCF</i> ( <i>reine Rotation</i> ) . . . . .	4
1.3.2 Annulare Poiseuille-Strömung <i>APF</i> ( <i>reiner Durchfluss</i> ) . . . . .	5
1.3.3 Resultierender Gesamtgrundzustand . . . . .	7
1.4 Lineare Wirbel-Strukturen . . . . .	7
1.4.1 Taylor Vortex Flow ( $M = 0$ ) . . . . .	7
1.4.2 Spiralen ( $ M  \neq 0$ ) . . . . .	7
<b>2 Lineare Stabilitätsanalyse</b>	<b>9</b>
2.1 Mathematisches Vorgehen . . . . .	9
2.2 Eigenwerte . . . . .	18
2.3 Marginale Stabilitätskurven und kritische Werte . . . . .	21
2.3.1 Marginale Stabilitätskurven . . . . .	21
2.3.2 Kritische Werte . . . . .	31
2.3.3 Systemspezifische Geschwindigkeiten . . . . .	32
2.3.4 Bifurkationsschwellen . . . . .	39
<b>3 Amplitudengleichungen - Stabilitätsflächen</b>	<b>43</b>
3.1 Amplitudengleichungen . . . . .	43
3.1.1 Grundlagen . . . . .	43
3.1.2 Lineare Koeffizienten . . . . .	45

3.1.3	Symmetrien der Koeffizienten . . . . .	48
3.1.4	Lineare Koeffizienten der 2-SPI für $\eta = 0.7$ und $\eta = 0.5$ . . . . .	49
3.1.5	Resumé . . . . .	56
3.2	Aufspaltung der marginalen Kurven . . . . .	57
3.2.1	Resumé . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Konvektive und absolute Instabilitätsschwellen</b>	<b>69</b>
4.1	Charakterisierung der Stabilitätsbereiche . . . . .	69
4.2	Lineare Analyse lokalisierter Störungen . . . . .	71
4.3	Berechnung der Grenze zwischen absoluter und konvektiver Instabilität . . . . .	73
4.4	Wachstumsschwellen von L2-SPI Strukturen . . . . .	75
4.5	Parameterabhängigkeit der Wachstumsschwellen . . . . .	83
4.6	Sattelflächen und Sattelpunkte . . . . .	87
4.7	Verlauf der Sattelpunkte in der komplexen $(k, K)$ Ebene . . . . .	91
4.8	Existenz mehrerer Sättel . . . . .	92
4.9	Resumé . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Fronten</b>	<b>105</b>
5.1	Klassifikation von Fronttypen . . . . .	105
5.2	Ermittlung der Frontpropagationen . . . . .	106
5.3	Symmetrieoperationen von $\pm$ Fronten für R/L-SPI . . . . .	108
5.4	Frontpropagation bei externem Durchfluss $Re$ . . . . .	109
5.5	Propagationsrichtungen und deren Auswirkungen . . . . .	112
5.6	Resumé . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>121</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>131</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Geometrie und charakteristische Größen im <i>Taylor-Couette System</i> . . . . .	1
1.2	Einfluss von $R_2$ und $\eta$ auf $v_{CCF}(r)$ . . . . .	5
1.3	Einfluss von $R_2$ und $\eta$ auf $w_{APF}(r)$ . . . . .	6
1.4	Weltlinien bzgl. $M = 0, \pm 1$ Strukturen . . . . .	8
2.1	Realteil der Eigenwerte beim TVF . . . . .	18
2.2	Real- und Imaginärteil der Eigenwerte einer L1-SPI . . . . .	19
2.3	Real- und Imaginärteil der Eigenwerte einer L2-SPI . . . . .	20
2.4	Real- und Imaginärteil der Eigenwerte der L3-SPI . . . . .	20
2.5	Marginale Stabilitätskurven $R_{1,marg}(k)$ von $M = 0, \pm 1, 2$ Strukturen; $\eta = 0.5, R_2 = 0$ . . . . .	22
2.6	Bifurkationsschwellen $R_{1,marg}(Re)$ von TVF, 1-SPI . . . . .	23
2.7	Marginale Stabilitätskurven von $M = 1, 2, 3, 4$ Strukturen für unterschiedliche $R_2$ . . . . .	24
2.8	Marginale Stabilitätskurven unterschiedlicher Strukturen $M$ , bei variierendem $R_2$ ; $\eta = 0.7, Re = 0$ . . . . .	25
2.9	Bifurkationsschwellen $R_{1,marg}(Re, R_2)$ von TVF und 1-SPI . . . . .	26
2.10	Projektion der Bifurkationsschwellen $R_{1,marg}(Re, R_2)$ von TVF und 1-SPI aus Abb. 2.9 in die $(R_2, Re)$ Ebene . . . . .	27
2.11	Marginale Stabilitätskurven unterschiedlicher Strukturen $M$ , bei variierendem $\eta$ . . . . .	29
2.12	Marginale Stabilitätskurven unterschiedlicher Radienverhältnisse $\eta$ für verschiedene Strukturen $M$ . . . . .	30
2.13	Marginale Stabilitätskurven für $ M  = 0, 1, 2$ , bei variierendem $\eta$ . . . . .	30
2.14	Kritische Frequenzen $\omega_c(Re)$ für TVF und 1-SPI Funktion von $Re, \eta = 0.5$ . . . . .	31
2.15	Vergleich der Gruppen- $w_g(Re)$ und Phasengeschwindigkeiten $w_{ph}(Re)$ der 1-SPI . . . . .	32
2.16	Absolutbeträge der Gruppen- $ w_g(Re) $ und Phasengeschwindigkeiten $ w_{ph}(Re) $ der 1-SPI . . . . .	33
2.17	Gruppen- $w_g(Re)$ und Phasengeschwindigkeiten $w_{ph}(Re)$ der 1-SPI bei Variation von $Re, R_2$ . . . . .	34
2.18	Verhältnis von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit $\frac{w_{ph}}{w_g}$ einer L1-SPI . . . . .	35

2.19	Kritische Werte, $R_{1,c}$ , $T_c$ , $k_c$ verschiedener Spiralen $M$ in Abhängigkeit von $R_2$ . . . . .	36
2.20	Kritische Werte, $T_c$ , $k_c$ , $\omega_c$ für TVF und 1-SPI in Abhängigkeit von $\eta$ ; $R_2 = 0$ , $Re = 1$ . . . . .	37
2.21	Kritische Bifurkationsschwellen $R_{1c}(R_2)$ der $M = 0, \pm 1, \pm 2$ Strukturen als Funktion von $R_2$ und $Re = 0$ ; $\eta = 0.5$ . . . . .	39
2.22	Bifurkationsschwellen $R_1(Re)$ von TVF und 1-SPI für $R_2 = 0, -75, -150$ bei Variation von $Re$ . . . . .	39
2.23	Reduzierte Bifurkationsschellen $\epsilon_c(Re)$ von TVF und 1-SPI unterschiedlicher $R_2$ . . . . .	40
2.24	Reduzierten Bifurkationsschellen $\epsilon_c(Re)$ unterschiedlicher Strukturen $M$ für verschiedene $R_2$ für $\eta = 0.5$ . links: $R_2 = 0, -150$ ; rechts: $R_2 = 0, 50, -50$ ; . . . . .	41
2.25	Reduzierte Bifurkationsschwellen $\epsilon_c(Re)$ aus numerischer Rechnung und Fitwerten aus Polynom 4. Grades für TVF und 1-SPI . . . . .	42
3.1	Marginale Stabilitätskurve $R_{1,marg}(k)$ einer R1-SPI in der Nähe des kritischen Punktes $(k_c, R_{1c})$ . . . . .	43
3.2	Linearer Koeffizient $v_g(Re)$ der L1-SPI für verschiedener $R_2$ bei Variation von $Re$ . . . . .	49
3.3	Linearer Koeffizient $v_g(Re)$ der R1-SPI für verschiedener $R_2$ bei Variation von $Re$ . . . . .	49
3.4	L2-SPI: Linearer Koeffizient $v_g(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.7$ . . . . .	52
3.5	R2-SPI: Linearer Koeffizient $v_g(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.7$ . . . . .	52
3.6	L2-SPI: Linearer Koeffizient $\tau_0(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.7$ . . . . .	52
3.7	L2-SPI: Linearer Koeffizient $c_0(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.7$ . . . . .	52
3.8	L2-SPI: Linearer Koeffizient $c_1(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.7$ . . . . .	53
3.9	L2-SPI: Linearer Koeffizient $\xi_0(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.7$ . . . . .	53
3.10	L2-SPI: Linearer Koeffizient $v_0(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.5$ . . . . .	55
3.11	L2-SPI: Linearer Koeffizient $\tau_0(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.5$ . . . . .	55
3.12	L2-SPI: Linearer Koeffizient $c_0(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.5$ . . . . .	55
3.13	L2-SPI: Linearer Koeffizient $c_1(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.5$ . . . . .	55
3.14	L2-SPI: Linearer Koeffizient $\xi_0(Re)$ bei Variation von $Re$ ; $\eta = 0.5$ . . . . .	56
3.15	Topologie von $\gamma(R_1, k)$ der dominanten $m = 2$ Mode einer L2-SPI für $\eta = 0.5$ Kontrollparameter: $Re = -6$ , $R_2 = 0$ . . . . .	57
3.16	Projektion der $\gamma$ -Isolinien der dominanten $m = 2$ Mode einer L2-SPI in die $(R_1, k)$ Ebene für $\eta = 0.5$ ; Kontrollparameter: $Re = -6$ , $R_2 = 0$ . . . . .	58
3.17	Realteil $\gamma(R_1)$ bei Variation von $R_1$ und festem $k$ , $m = 2$ , $\eta = 0.5$ , $Re = -6$ , $R_2 = 0$ . . . . .	59
3.18	Marginalen Kurve der L2-SPI gewonnen als $\gamma = 0$ Isolinie; $\eta = 0.5$ , $Re = -6$ , $R_2 = 0$ . . . . .	60
3.19	Realteile der Eigenmoden $u$ , $v$ , $w$ der L2-SPI, $\eta = 0.5$ , $Re = -6$ , $R_2 = 0$ , $k = 3.635111$ . . . . .	61
3.20	Vektorplot des $(u, w)$ -Feldes einer L2-SPI, $\eta = 0.5$ , $Re = -6$ , $R_2 = 0$ . . . . .	63

3.21	links: Marginale Stabilitätskurven der L2-SPI bei Variation von $Re$ . Kontrollparameter: $R_2 = 0$ ; rechts: Verlauf der Bergspitze bzgl. der $\gamma = 0$ -Ebene bei Variation von $Re$ . Kontrollparameter: $R_1 = 171.88, R_2 = 0, \eta = 0.5$ . . .	64
3.22	Marginale Stabilitätskurven der L2-SPI bei Variation von $R_2$ . Kontrollparameter: $Re = -6, \eta = 0.5$ Zur besseren Übersichtlichkeit wurden die Kurven für $R_2 = -6, -9$ weggelassen. Für die durchgezogene Linien gilt $R_2 < 0$ und bei strichpunktierten $R_2 > 0$ ; schwarze Kurve: $R_2 = 0$ ; gleich Farben gehören zu identischen Beträgen $ R_2 $ . . . . .	65
3.23	$\gamma = 0$ Isoläche $C(R_1, k, R_2) _{\gamma=0}$ einer L2-SPI über der $(R_1, k)$ Ebene als Funktion von $R_2, Re = -6, \gamma = 0, \eta = 0.5$ . . . . .	66
3.24	Bifurkationsschwellen $R_1(R_2)$ einer L2-SPI für feste $k = 3.6$ und $k = 4.5$ . . . . .	67
4.1	Unendlich ausgedehnte kritische Eigenmode. . . . .	69
4.2	Räumlich beschränktes Wellenpaket . . . . .	69
4.3	Zeitlicher Verlauf lokalisierter bzw. unendlich ausgedehnter Störungen mit den daraus resultierenden Stabilitätsbereichen: absolut stabil; konvektiv instabil; absolut instabil . . . . .	70
4.4	L2-SPI: Wachstumsschwellen $\epsilon_c(Re)$ und $\epsilon_{c-a}(Re)$ als Funktion von $Re; R_2 = -100, -50, 0, 50, m = 2, \eta = 0.7$ . . . . .	76
4.5	L2-SPI: Wachstumsschwellen $\epsilon_c(Re)$ und $\epsilon_{c-a}(Re)$ als Funktion von $Re; R_2 = -150, m = 2, \eta = 0.7$ . . . . .	77
4.6	L2-SPI: Wachstumsschwellen $\epsilon_c(Re)$ und $\epsilon_{c-a}(Re)$ als Funktion von $Re; R_2 = -100, -50, 0, 50, m = 2, \eta = 0.5$ . . . . .	78
4.7	L2-SPI: Wachstumsschwellen $\epsilon_c(Re)$ und $\epsilon_{c-a}(Re)$ als Funktion von $Re; R_2 = -150, m = 2, \eta = 0.5$ . . . . .	79
4.8	L2-SPI: Vergleich der Wachstumsschwellen $\epsilon_c(Re)$ und $\epsilon_{c-a}(Re)$ als Funktion von $Re$ zwischen $\eta = 0.7$ und $\eta = 0.5$ . . . . .	80
4.9	Konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen $\epsilon_{c-a}(Re)$ einer L2-SPI als Funktion von $Re$ bei Variation von $\eta$ ; Kontrollparameter: $R_2 = 0$ . . . . .	83
4.10	Konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen $\epsilon_{c-a}(Re)$ einer L2-SPI als Funktion von $Re$ bei Variation von $R_2; \eta = 0.5$ . . . . .	84
4.11	Konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen $\epsilon_{c-a}(Re, R_2, \eta)$ einer L2-SPI, bei Variation von $\eta$ und $R_2; \eta = 0.5..0.7, Re = -20..20, R_2 = -50..0$ . . . . .	85
4.12	Konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen $\hat{\epsilon}_{c-a}(R_2)$ einer L2-SPI als Funktion von $R_2$ bei Variation von $Re; \eta = 0.5$ ; größter Wert $R_2 = 23$ wird für Durchfluss $Re = -2$ erreicht. . . . .	86
4.13	L2-SPI: Sattelfläche der beiden größten Eigenwerte bei $Re = 1.58$ und Projektion dieser in die $(k, K)$ Ebene . . . . .	87
4.14	L2-SPI: Auszug aus Falschfarbenplot der Sattelfläche mit $\gamma = 0$ -Isolinien und Projektion dieser in die $(k, K)$ Ebene . . . . .	88
4.15	L2-SPI: Überprüfung der Sattelpunktsbedingungen für $Q_s = 3.77619456 + i * 1.26349068; \eta = 0.5, R_2 = 0, Re = 1.58$ . . . . .	89

4.16	L2-SPI: Auszug aus Falschfarbenplot der Sattelfläche mit $\gamma = 0$ -Isolinien und Projektion dieser in die $(k, K)$ Ebene . . . . .	90
4.17	L2-SPI: Bewegung der Sattelpunkte in der $(k, K)$ Ebene bzgl. $R_1$ und $Re$ .	91
4.18	L2-SPI: Auszug aus dem Stabilitätdiagramm Abb. 4.10; $\eta = 0.5$ , $R_2 = -40$	93
4.19	Doppelsattelflächen der L2-SPI für $Re = -11.83$ , $\eta = 0.5$ , $R_2 = -40$ , $R_1 = 228.636121$ und $R_1 = 229.656211$ . . . . .	93
4.20	L2-SPI: $\gamma = 0$ -Isofläche bei $R_1$ Variation über die $(k, K)$ Ebene . . . . .	95
4.21	L2-SPI: $\gamma = 0$ -Isofläche bei $R_1$ Variation über die $(k, K)$ Ebene und Sattelflächen die beide die Sattelpunktsbedingung erfüllen. . . . .	96
4.22	L2-SPI: Grafik der $\gamma = 0$ -Isolinie für $R_1 = 228.636121$ und $R_1 = 229.656211$ ; $\eta = 0.5$ , $R_2 = -40$ , $Re = -11.83$ . . . . .	97
4.23	L2-SPI: Sattelflächen für verschiedene überkritische Werte a) $\mu = 0.054 := R_1 = 125.242859$ (Lsg. 3 aus Abb. 4.18); b) $\mu = 1.157 := R_1 = 256.308197$ (Lsg. 4 aus Abb. 4.18); c,d) $\mu = 0.2, 0.5$ ; $\eta = 0.5$ , $R_2 = -40$ , $Re = 0$ . . . .	98
4.24	Absolute und konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen von $M = 0, 1, 2, 3$ Strukturen als Funktion von $R_2$ für $\eta = 0.5$ ; $Re = 0$ , . . . . .	100
4.25	Absolute und konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen von TVF, 1- und 2-SPI als Funktion von $Re$ für $\eta = 0.5$ ; $R_2 = 0$ . . . . .	101
4.26	Zugehörige Frequenzen zu den Stabilitätsschwellen von TVF, 1- und 2-SPI aus Abb. 4.25 als Funktion von $Re$ ; $R_2 = 0$ . . . . .	101
4.27	L2-SPI: kritische Werte $\omega_c, k_c, v_{ph,c}$ der absoluten Stabilitätsschwelle $R_{1c}$ .	102
4.28	'AH-Horn': Absolute und konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen einer L2-SPI als Funktion von $Re$ und der Rotation $R_2$ für $\eta = 0.5$ . . . . .	103
5.1	Qualitative Darstellung der beiden unterschiedlichen Fronttypen; links: +Front; rechts: -Front. . . . .	106
5.2	Fronteigenschaften $K_{s,\pm}, k_{s,\pm}, v_{s,\pm}, \omega_{s,\pm}$ einer L2-SPI für $Re = 0, 5, 10, 20$ ; $\eta = 0.5$ , $R_2 = 0$ . . . . .	110
5.3	Fronteigenschaften $K_{s,\pm}, k_{s,\pm}, v_{s,\pm}, \omega_{s,\pm}$ einer L2-SPI für $Re = 25$ ; $\eta = 0.5$ , $R_2 = 0$ . . . . .	111
5.4	Vergleich der Frontgeschwindigkeiten unterschiedlicher Strukturen $M = 0, 1, 2$ ; $\eta = 0.5$ , $Re = 10$ , $R_2 = 0$ . . . . .	112
5.5	Frontgeschwindigkeiten $v_+, v_-$ der beiden Fronttypen $\pm$ einer L2-SPI bei Variation von $Re$ ; $R_2 = 0$ , $\eta = 0.5$ . . . . .	113
5.6	Frontgeschwindigkeiten $v_+, v_-$ der beiden Fronttypen $\pm$ einer L2-SPI bei Variation von $Re$ und $\mu$ und Projektion der Isolinien $v_- = 0 = v_+$ ; $R_2 = 0$ , $\eta = 0.5$ . . . . .	114
5.7	Gruppen- $w_g$ und Frontgeschwindigkeiten $v_{\pm}$ mit zugehörigen Frequenzen $\omega_{\pm}$ einer L2-SPI für $\mu = 0.1$ , $R_2 = 0$ , $\eta = 0.5$ . . . . .	115
5.8	Frontgeschwindigkeiten $v_+, v_-$ der beiden Fronttypen $\pm$ einer L2-SPI bei Variation von $R_2$ ; $Re = 0$ , $\eta = 0.5$ . . . . .	116
5.9	Frontgeschwindigkeiten der + und - Fronten einer L2-SPI bei Variation von $R_2$ und $\mu$ und Projektion der $\gamma = 0$ Isolinie; $Re = 0$ , $\eta = 0.5$ . . . . .	117

5.10	Frontgeschwindigkeiten $v_+$ , $v_-$ der beiden Fronttypen $\pm$ einer L2-SPI bei Variation von $\eta$ ; $Re = 0$ , $R_2 = 0$ . . . . .	118
5.11	Zusammenhang von Frontpropagation $v_{\pm}$ und Stabilitätsschwellen $\epsilon_{c-a}$ bei L2-SPI $\epsilon_{c-a}$ ; $\eta = 0.5$ . . . . .	119
6.1	Runge-Kutta-Verfahren 4ter Ordnung . . . . .	126



# Tabellenverzeichnis

3.1	Symmetriezusammenhang der linearen Koeffizienten der Amplitudengleichung . . . . .	49
3.2	Symmetrien der einzelnen Fitparameter $a_i$ der linearen Koeffizienten . . . . .	50
3.3	Fitparameter für die $Re$ -Abhängigkeit der linearen Koeffizienten der L2-SPI; $\eta = 0.7$ . . . . .	51
3.4	Fitparameter für die $Re$ -Abhängigkeit der linearen Koeffizienten der L2-SPI; $\eta = 0.5$ . . . . .	54
4.1	Einteilung des Parameterraums nach den unterschiedlichen Stabilitätskriterien. $\mu_{c-a}(Re) = \frac{R_{1c-a}(Re)}{R_{1c}(Re)} - 1$ . . . . .	73
4.2	L2-SPI: Fitparameter der beiden Stabilitätsschwellen $\epsilon_c(Re)$ und $\epsilon_{c-a}(Re)$ , gewonnen aus der $GLN$ ; $\eta = 0.7$ . . . . .	81
4.3	L2-SPI: Fitparameter der beiden Stabilitätsschwellen $\epsilon_c(Re)$ und $\epsilon_{c-a}(Re)$ , gewonnen aus der $GLN$ ; $\eta = 0.5$ . . . . .	82

Symbol	Bezeichnung	Seite
$\pm$ , Index	$\pm$ Front	105
$a_1, a_2, a_3$		17
$A$		5
$A(z, t)$	Amplitude	44
$\underline{A}$		17
APF	Annular Poiseuille Flow	5
$B$		5
$c$ , Index	kritisch	31,72
$c - a$ , Index	konvektiv-absolut	73
$c_0, c_1, c_2$		44,45
CCF	Circular Couette Flow	4
$C$		6
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	17
$d$	Spaltbreite	1
$D$		6
$E$		15
$\underline{E}$		11
$\underline{\underline{E}}^*$		14
$G$ , Index	Grundzustand	7
GLN	Ginzburg-Landau-Näherung	44
$Im[]$	Imaginärteil	17
$k, k_c$	Wellenzahl, Realteil, kritische	7,12,72,31
$K$	Wellenzahl, Imaginärteil	72
$\{L, R\}\{1, 2, \dots\} - SPI$	L- und R-SPI mit entsprechender Strukturwellenzahl $M$	8
$L - SPI$ , Exponent	L-SPI Front	108
$L$	Systemlänge	1
$\underline{L}$		11
$\underline{\underline{L}}^*$		14
$\underline{\underline{L}}^{**}$		15
$m$	Mode	12
$M$	Struktur	7
$margin$ , Index	marginal	21,22
$n$		12
$NSE$	Navier-Stokes-Gleichungen	2
$p$	Druck	1,7
$\hat{p}$	Störung von $p$	9
$Q = k - iK$	komplexe Wellenzahl	72
$\vec{r} = (r, \varphi, z)$	Ortsvektor in Zylinderkoordinaten	2
$r$	radiale Koordinate	2
$r_1, r_2$	innerer, äußerer Zylinderradius	1
$R - SPI$ , Exponent	R-SPI Front	108
$R_1, R_2$	innere, äußere Reynoldszahl	3
$Re$	Durchfluss	21
$Re[]$	Realteil	17

Symbol	Bezeichnung	Seite
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	16
$s$ , Index	Sattelpunkt	72
SPI	Spiralwirbel	7
$t$		11
$T, (T_c)$	Taylorzahl, (kritische)	3,37
TVF	Taylor-Vortex-Flow	7
$u$	radiale Geschwindigkeitskomponente	7,10
$\vec{u}(\vec{r}, t)$	Geschwindigkeitsfeld	1
$\hat{u}$	kl. Störung von $\vec{u}$	9
$\hat{u}$	Eigenmode	12
$v$	azimutale Geschwindigkeitskomponente	7,10
$v_g = w_g$	Gruppengeschwindigkeit	33,45,46
$v_{ph} = w_{ph}$	Phasengeschwindigkeit	33
$v_s$	Frontgeschwindigkeit	107
$\hat{v}$	Eigenmode	12
$w$	axiale Geschwindigkeitskomponente	7,10
$\hat{w}$	Eigenmode	12
$X$	Eigenmode	14
$\vec{X}$		17
$\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$	Startvektoren	17,16
$Y$	Eigenmode	14
$z$	axiale Koordinate	2
$Z$	Eigenmode	14
$\alpha$		15
$\delta k = k - k_c$		43,44
$\epsilon$		40,73
$\hat{\epsilon}$		86
$\varphi$	azimutale Koordinate	2
$\gamma$		44
$\gamma$	Realteil von $\sigma$	11
$\lambda = \frac{2\pi}{k}$	Wellenlänge	8,12
$\mu$		44
$\nu$	kinematische Viskosität	1
$\rho$	Massendichte	1
$\sigma_A$	Eigenwert, <i>Ginzburg-Landau</i>	45
$\sigma$	Eigenwert, <i>Navier-Stokes</i>	11
$\Sigma$		72
$\tau_0$		45,47
$\eta = \frac{r_2}{r_1}$	Radienverhältnis	1,28
$\omega$	Imaginärteil von $\sigma$	11
$\Omega_1, \Omega_2$	Winkelgeschwindigkeit des inneren, äußeren Zylinders	1
$\xi_0^2$		45,48
$\Theta$		47
$\nabla$	Nablaoperator	3
$\nabla^2 = \Delta$	Laplaceoperator	3

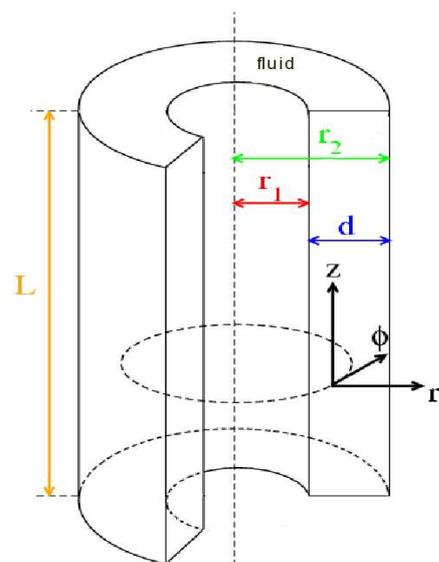


# Kapitel 1

## Das System

### 1.1 Die hydrodynamischen Grundgleichungen

### 1.2 Systemgeometrie



$r_1$	=	innerer Zylinderradius
$r_2$	=	äußerer Zylinderradius
$d$	=	Spaltbreite $d = r_2 - r_1$
$L$	=	Länge des Zylinders
$\eta$	=	Radialverhältnis $\frac{r_2}{r_1}$
$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$	=	Geschwindigkeitsfeld ( $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ )
$p$	=	Druck
$\rho$	=	Massendichte
$\nu$	=	kinematische Viskosität
$\Omega_1$	=	Winkelgeschw. des inneren Zylinders
$\Omega_2$	=	Winkelgeschw. des äußeren Zylinders

Abbildung 1.1: Geometrie und charakteristische Größen im *Taylor-Couette System*

Beim Taylor-Couette System handelt es sich um ein System, aus zwei konzentrisch zueinander angeordneten Zylindern (Abb. 1.1), die unabhängig voneinander rotieren können. Der Zwischenraum ist dabei vollständig mit einer Flüssigkeit befüllt, die die kinematische Viskosität  $\nu$  besitzt und inkompressibel sei.

Das vorwiegende Interesse gilt dabei der Untersuchung von Geschwindigkeits- und Druckfeldern, welche das Strömungsverhalten der Flüssigkeit charakterisieren, sowie Übergänge verschiedener Bewegungsformen. Aus Geometrie Gründen werden die Felder in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  beschrieben:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\varphi + w\mathbf{e}_z$$

Hierbei entsprechen  $u$  der radialen,  $v$  der azimuthalen und  $w$  der axialen Geschwindigkeitskomponente.

### 1.2.1 Die Grundgleichungen

Der Ausgangspunkt zur Berechnung der Geschwindigkeitsfelder sind Bilanzgleichungen für Masse und Impuls. Hierbei wird im folgenden von inkompressiblen Flüssigkeiten ausgegangen.

- Die Massenbilanz führt auf ein *Kontinuitätsgleichung*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0, \quad (1.1)$$

die sich im vorliegenden Fall inkompressibler Flüssigkeiten ( $\rho \equiv \text{const.}$ ) zu

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.2)$$

vereinfachen.

- Die Impulsbilanz liefert die *Navier-Stokes-Gleichungen* (NSE) [1]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.3)$$

Für die Beschreibung des Taylor-Couette Systems sollen die beiden Gleichungen (1.3) und (1.1) zugrundegelegt werden.

Als Randbedingungen für die Geschwindigkeitsfelder wird an den Zylinderwänden die realistische Annahme der *no-slip* Randbedingungen [8][17] vorgegeben. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit und der rotierenden Zylinderwände identisch sind. Desweiteren werden dem System in axialer Richtung periodische Randbedingung auferlegt, um axial periodische Strukturen in langen Zylinder zu simulieren.

$$\vec{u}(r_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \Omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}(r_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \Omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}(z) = \vec{u}(z + L)$$

### 1.2.2 Entdimensionalisierung

Zur Implementierung der Grundgleichungen (1.3) und (1.2) werden diese zuerst folgendermaßen entdimensionalisiert (vgl. Abb. 1.1).

- Längenskala:

$$r, r_1, r_2, \lambda_1, \nabla, \nabla^2 \longrightarrow \frac{r}{d}, \frac{r_1}{d}, \frac{r_2}{d}, \frac{\lambda_1}{d}, d\nabla, d^2\nabla^2$$

- Geschwindigkeitsskala:

$$\vec{u} \longrightarrow \frac{\vec{u}}{r_1\Omega_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\nu}{d} \quad (1.4)$$

- Zeitskala (Impulsdiffusionszeit):

$$t, \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\nu}{d^2}t, \frac{d^2}{\nu} \frac{\partial}{\partial t}$$

- Impulsskala (ergibt sich als Konsequenz der anderen Skalierungen):

$$p \longrightarrow \frac{d}{\rho r_1 \Omega_1 \nu} p,$$

$$\implies \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nabla^2 \vec{u} - R_1 (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nabla p \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.6)$$

Hierbei sind die auftretenden *innere* und *äußere Reynoldszahl* wie folgt definiert:

$$R_1 := \frac{r_1 \Omega_1 d}{\nu}, \quad R_2 := \frac{r_2 \Omega_2 d}{\nu}$$

Die *Taylor-Zahl* [13] wird folgendermaßen definiert:

$$T := \frac{1 - \eta}{\eta} R_1^2$$

Aufgrund der hier vorliegenden Systemgeometrie bietet es sich an, die Gleichungen (1.3) und (1.1) in Zylinderkoordinaten umzuschreiben. Zusammen mit der Entdimensionalisierung 1.4 erhält man die von nun ab verwendete Darstellung:

- *Navier-Stokes Gleichungen*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla^2 u - R_1(\vec{u} \cdot \nabla)u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + R_1 \frac{v^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla^2 v - R_1(\vec{u} \cdot \nabla)v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - R_1 \frac{uv}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= \nabla^2 w - R_1(\vec{u} \cdot \nabla)w - \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

- *Kontinuitätsgleichung*

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}v + \frac{\partial}{\partial z}w$$

- *Randbedingungen*

$$\vec{u}(r = \frac{\eta}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}(r = \frac{1}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}(z = 0) = \vec{u}(z = L) \tag{1.8}$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
(\vec{u} \cdot \nabla) &= u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

## 1.3 Der Grundzustand

### 1.3.1 Zirkulare Couette-Strömung *CCF* (*reine Rotation*)

Für kleine Reynoldszahlen  $R_1$ ,  $R_2$  und ohne Durchfluss  $Re = 0$  bildet sich eine rein radiale Strömung innerhalb des Spaltes aus. Hierbei handelt es sich um ein laminares Strömungsprofil um die Zylinderachse (Abb. 1.2). Aufgrund der Symmetrie der Randbedingungen ist das Feld rotations- und  $z$  translationsinvariant und muss an beiden Seiten verschwinden. Das Profil dieses, als *Circular Couette Flow CCF* bezeichneten Feldes, lautet somit.

$$\vec{u}_{CCF} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ v_{CCF}(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_{CCF} \equiv p_{CCF}(r) \tag{1.9}$$

Setzt man nun (1.9) in die obigen Grundgleichungen (1.7) ein, so reduzieren sich diese zu

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \right) v_{CCF}(r) = 0 \tag{1.10}$$

$$R_1 \frac{v_{CCF}^2(r)}{r} = \frac{\partial p_{CCF}(r)}{\partial r} \tag{1.11}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$v_{CCF}(r) = Ar + \frac{B}{r}, \quad (1.12)$$

deren Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  aus den Randbedingungen (1.8) folgen. Diese sind jedoch auch noch von der gewählten Entdimensionalisierung abhängig. Im hier vorliegenden Fall ergeben sie sich zu:

$$A = -\frac{\eta^2 - \mu}{\eta(1 + \eta)}, \quad B = \frac{\eta(1 - \mu)}{(1 - \eta)(1 - \eta^2)} \quad (1.13)$$

Der Druck wird durch Aufintegration von (1.11) gewonnen:

$$p_{CCF}(r) = R_1 \int_{r_1}^r \frac{v_{CCF}^2(r')}{r'} dr' \quad (1.14)$$

$$= \frac{R_1}{2} \left[ A^2 r'^2 + 4AB \ln(r') - \frac{B^2}{r'^2} \right] \Big|_{r_1}^r \quad (1.15)$$

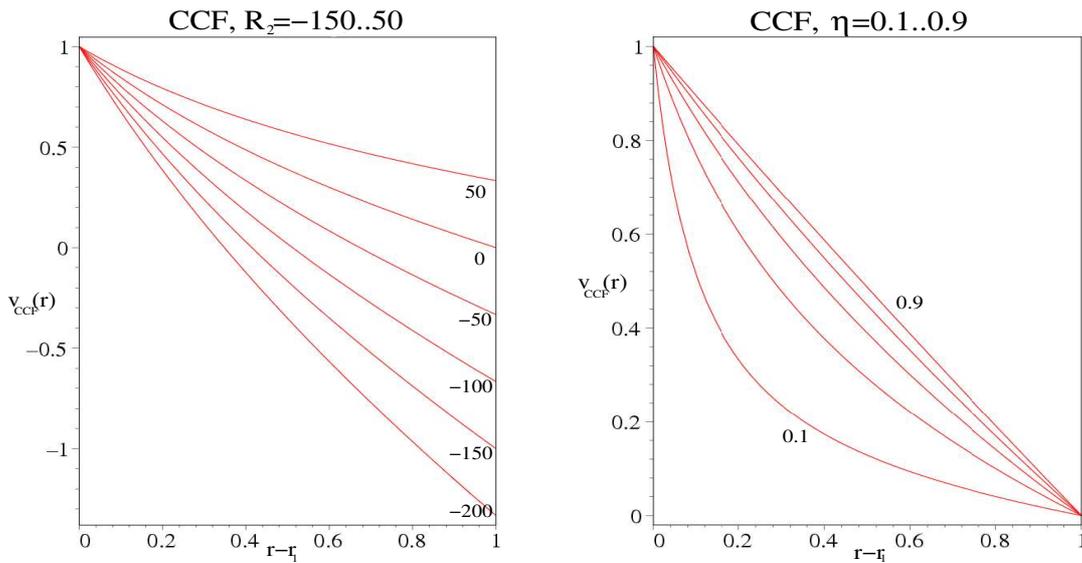


Abbildung 1.2: Einfluss von  $R_2$  und  $\eta$  auf den *Circular Couette Flow*  $v_{CCF}(r)$ ; Kontrollparameter:  $R_1 = 150$ ; links:  $\eta = 0.5$ , rechts:  $R_2 = 0$ ,  $Re = 0$

### 1.3.2 Annulare Poiseuille-Strömung *APF* (*reiner Durchfluss*)

Legt man nun dem System im Gegensatz zu dem vorherigen Abschnitt einen in axialer Richtung verlaufenden Druckgradienten auf, so kommt es zur Ausbildung eines stationären

Durchflusses entlang der  $z$  Achse. Dieser wird als *Annular Poiseuille Flow APF* bezeichnet. (Abb. 1.3)

$$\vec{u}_{APF}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{APF}(r) \end{pmatrix}, \quad p_{APF} = p_{APF}(r, z) \quad (1.16)$$

Wie auch zuvor schon beim CCF reduzieren sich die NSE und die Kontinuitätsgleichung durch das Einsetzen dieses Geschwindigkeits- und Druckprofils (1.16) zu:

$$\frac{\partial p_{APF}(r, z)}{\partial z} = \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial w_{APF}(r)}{\partial r} \quad (1.17)$$

( $\frac{\partial p_{APF}}{\partial z}$  := von Außen angelegter Druckgradient) Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich zu:

$$w_{APF}(r) = \frac{\partial p_{APF}}{\partial z} \frac{1}{4} (r^2 + C \ln(r) + D) \quad (1.18)$$

Die Konstanten  $C$  und  $D$  folgen aus den jeweiligen Randbedingungen und lauten in der hier verwendeten Entdimensionalisierung:

$$C = \frac{1 + \eta}{(1 - \eta) \ln(\eta)} \quad (1.19)$$

$$D = \frac{(1 + \eta) \ln(1 - \eta)}{(1 - \eta) \ln(\eta)} - \frac{1}{(1 - \eta)^2} \quad (1.20)$$

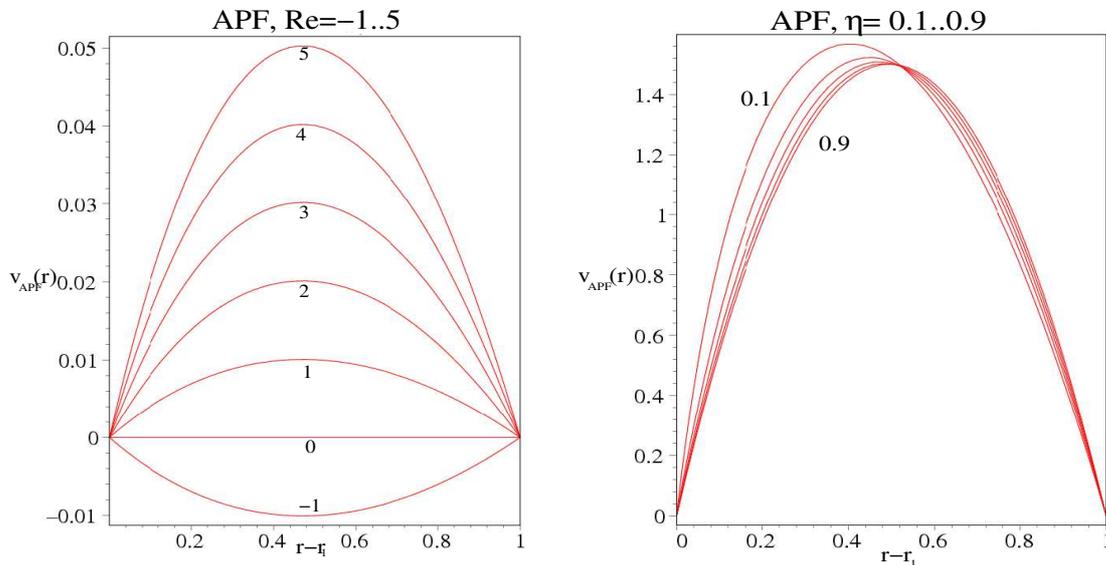


Abbildung 1.3: Einfluss von  $R_2$  und  $\eta$  auf den *Annular Poiseuille Flow*  $w_{APF}(r)$ ; Kontrollparameter:  $R_1 = 150$ , links:  $\eta = 0.5$ , rechts:  $Re = 1$ ,  $R_2 = 0$

### 1.3.3 Resultierender Gesamtgrundzustand

In den beiden vorherigen Abschnitten wurden die beiden Grenzfälle der im System auftretenden Strukturen für die Fälle ausschließlicher Rotation und reinen Durchflusses diskutiert. Für den Fall, dass sowohl der Durchfluss  $Re$ , wie auch die Rotationsgeschwindigkeit des inneren Zylinders  $\Omega_1$  hinreichend klein sind, so ergibt sich ein stationärer Grundzustand, der sich additiv aus diesen superponieren läßt und eine Lösung der NSE in allen Parameterkombinationen darstellt.

$$\vec{u}_G(r) = \vec{u}_{CCF}(r) + \vec{u}_{APF}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{CCF}(r) \\ w_{APF}(r) \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

## 1.4 Lineare Wirbel-Strukturen

### 1.4.1 Taylor Vortex Flow ( $M = 0$ )

Im Fall einer  $M = 0$  Struktur ist die räumliche Variation gegeben durch (vgl. (2.13)):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(r) \\ V(r) \\ W(r) \\ P(r) \end{pmatrix} e^{ikz} + c.c \quad (1.22)$$

Hieraus ist offensichtlich, dass die  $M = 0$  Felder rotationssymmetrisch sein müssen, da keine Winkelabhängigkeit ( $\varphi$ ) mehr vorhanden ist. Linien konstanter Phase  $\varphi$

$$kz = const. \iff z = const \quad (1.23)$$

zeigen, dass es sich dabei im dreidimensionalen um konzentrische Ringe, unabhängig vom Radius oder im Fall der Ebene eines abgerollten Zylinders um Geraden parallel zur  $z = 0$  Linie handelt (Abb. 1.4).

### 1.4.2 Spiralen ( $|M| \neq 0$ )

Die räumliche Struktur von  $M \neq 0$  Spiralen ist linear gegeben durch (vgl. (2.13)):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(r) \\ V(r) \\ W(r) \\ P(r) \end{pmatrix} e^{i(kz+M\varphi)} + c.c \quad (1.24)$$

Im Gegensatz zum TVF ( $M = 0$ ) existiert eine echte  $\varphi$  Abhängigkeit. Hierbei ergeben sich die Linien konstanter Phase  $\varphi$  bei  $t = 0$  zu:

$$kz + M\varphi = const. \iff z = -\frac{M}{k}\varphi \quad (1.25)$$

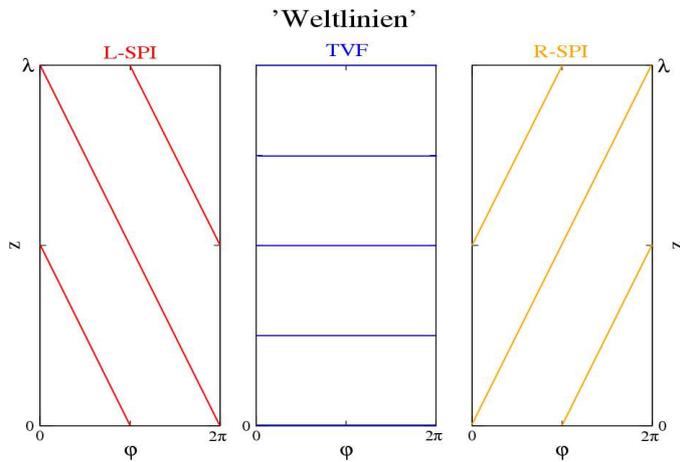


Abbildung 1.4:  
Quantitative Darstellung der Weltlinien konstanter Phase  $\varphi$  verschiedener Strukturen  $M = 0, \pm 1$

(wobei  $M < 0$  oder  $M > 0$ )

Somit ergeben sich hieraus Diagonalen in der Ebene (vgl. Abb. 1.4), deren Steigung, abhängig vom Vorzeichen der strukturbildenden Wellenzahl  $M$  entweder positiv oder negativ sein kann. Im Dreidimensionalen handelt es sich um eine helixförmige Struktur. Dabei liegt im Fall positiver/negativer  $M$  eine Linksschraube (L-SPI)/Rechtsschraube (R-SPI) vor (Abb. 1.4). Wie schon beim TVF existiert ebenfalls keine radiale Abhängigkeit der konst.-Phasenflächen. Im Folgenden werden diese mit LM-SPI bzw. RM-SPI bezeichnet, wobei  $M = 1, 2, \dots$  die strukturbildende Wellenzahl darstellt.

# Kapitel 2

## Lineare Stabilitätsanalyse

### 2.1 Mathematisches Vorgehen

Im Folgenden soll die Stabilität des Grundzustands gegenüber primär herausbifurkierenden Spiralwirbeln überprüft werden. Für hinreichend kleine Reynoldszahlen  $R_1$  und  $R_2$  ist dieser gegenüber kleinen Störungen stabil. Dabei bedeutet *stabil* definitionsgemäß, dass beliebige, aber kleine Störungen der Lösung zeitlich nicht anwachsen [19]. Ohne Störung verharrt das System, selbst bei überkritischen Kontrollparametern im stabilen Grundzustand. Erst unter der Voraussetzung, dass beides vorliegt eine kleine Störung und überkritische Kontrollparameter kann das System in einen neuen Zustand übergehen.

Dieser Übergang der Kontrollparameter vom unter- zum überkritischen Bereich bedingt somit eine wesentliche Änderung der zeitlichen Dynamik der Störamplituden. Unterhalb des kritischen Wertes des Kontrollparameters werden alle Störungen weggedämpft und sterben somit zeitlich aus. Oberhalb des kritischen Wertes treten Störungen mit bestimmten Wellenzahlen  $k$  zu entsprechenden Moden  $m$  auf, deren Amplituden exponentiell anwachsen. Dabei gilt, dass die Anzahl dieser wachstumsfähigen Wellenzahlen mit den Kontrollparametern anwächst.

Die marginale Stabilitätskurve stellt die Grenze zwischen unter- und überkritischem Bereich in Abhängigkeit der Wellenzahl dar. Sie markiert, für verschiedene Wellenzahlen  $k$  den Wert des Kontrollparameters, bei dem die Wachstumsrate gerade Null beträgt.

Zur expliziten Stabilitätsuntersuchung werden den Feldern der jeweiligen Lösungen kleine Störungen aufaddiert:

$$\vec{u}(r, z, t) = \vec{u}_G(r, z, t) + \hat{\vec{u}}(r, z, t), \quad p = p_G + \hat{p}(r, z, t) \quad (2.1)$$

Die Aussage über die Stabilität erfolgt über die zeitliche Entwicklung der Störfelder  $\hat{\vec{u}}$  und  $\hat{p}$ . Stabilität der Lösung liegt genau dann vor, wenn beliebige Störungen weggedämpft

werden, ansonsten ist die Lösung instabil. Um die Dynamik der Störung zu untersuchen, werden diese inklusive des Grundzustands in Grundgleichungen eingesetzt. Die Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten lauten nach (1.7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla^2 u - R_1(\vec{u} \cdot \nabla)u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + R_1 \frac{v^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla^2 v - R_1(\vec{u} \cdot \nabla)v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - R_1 \frac{uv}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \nabla^2 w - R_1(\vec{u} \cdot \nabla)w - \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}v + \frac{\partial}{\partial z}w \quad (2.3)$$

In diese werden nun die Felder inklusive kleiner Störungen (2.1) eingesetzt.

Dabei ergeben sich sowohl Terme, die bereits alleine die Navier-Stokes-Gleichung des Grundzustandes erfüllen, sowie Ableitungen des Gleichen, was eine Elimination dieser Beiträge in der Gleichung ergibt.

Die so resultierenden Gleichungen beschreiben nun die temporäre Entwicklung einer in das System von außen eingebrachten Störung  $\hat{\vec{u}}$ . Im folgenden werden diese, der Einfachheit halber, nur noch mit  $\vec{u}$  bezeichnet. Es ist jedoch wichtig zu wissen, dass es sich auch fortwährend immer noch um die Störfelder  $\hat{\vec{u}}$  handelt.

Die vollen Gleichungen der Störfelder  $\vec{u}$  lauten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla^2 u - R_1[(\vec{u} \cdot \nabla)u + (\vec{u}_G \cdot \nabla)u] \\ &\quad - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + R_1 \frac{2v_G v - v^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla^2 v - R_1[(\vec{u} \cdot \nabla)(v + v_G) + (\vec{u}_G \cdot \nabla)v] \\ &\quad - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - R_1 \frac{uv}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \nabla^2 w - R_1[(\vec{u} \cdot \nabla)(w + w_G) + (\vec{u}_G \cdot \nabla)w] - \frac{\partial p}{\partial z} \\ 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}v + \frac{\partial}{\partial z}w\end{aligned}\quad (2.4)$$

Bei der linearen Stabilitätsanalyse werden nur kleine Störungen  $\vec{u}$  des Grundzustandes  $\vec{u}_G$  betrachtet. Demzufolge können Terme, die aus dem nichtlinearen Summanden  $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$  resultieren oder quadratische Terme der Störungen vernachlässigt werden (vgl. rot markierte Terme). Somit ergeben sich aus (2.4) die linearisierten Gleichungen der Störfelder inklusive

der Randbedingungen zu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla^2 u - R_1(\vec{u}_G \cdot \nabla)u \\ &\quad - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + R_1 \frac{2v_G v}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla^2 v - R_1[(\vec{u} \cdot \nabla)v_G + (\vec{u}_G \cdot \nabla)v] \\ &\quad - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \nabla^2 w - R_1[(\vec{u} \cdot \nabla)w_G + (\vec{u}_G \cdot \nabla)w] - \frac{\partial p}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} v + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r}\end{aligned}$$

$$\vec{u}(r = \frac{\eta}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}(r = \frac{1}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}(z) = \vec{u}(z + L) \quad (2.6)$$

Hierbei wurden die Randbedingungen der Störung (2.6) so gewählt, dass der Grundzustand plus Störung immer noch die *no-slip Randbedingungen* erfüllen. Das komplette Gleichungssystem (2.5) stellt ein *Randwertproblem* (Anhang) eines linearen partiellen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung dar, das sich in allgemeiner Form als

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} \frac{\partial}{\partial t} \vec{x} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} \vec{x} \quad (2.7)$$

schreiben läßt, wobei

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Für dieses in  $t$  autonome System bietet sich eine komponentenweise Lösung in Form eines Produktansatzes wie folgt an:

$$\begin{aligned}\vec{u}(r, \varphi, z, t) &= \vec{\hat{u}}(r, \varphi, z) e^{\sigma t}, \quad \text{bzw.} \quad p(r, \varphi, z, t) = \hat{p}(r, \varphi, z) e^{\sigma t} \\ \text{mit } \sigma &= \gamma + i\omega\end{aligned}\quad (2.9)$$

Dieser Ansatz bedeutet, dass eine Störung für unterkritische Kontrollparameter mit  $\gamma < 0$  weggedämpft wird, und entsprechend bei überkritischen Kontrollparametern  $\gamma > 0$  exponentiell anwächst. Das temporäre Verhalten einer Störung wird nach (2.9) durch die *Wachstumsrate*  $\gamma$  sowie die *Frequenz*  $\omega$  beschrieben. Resultat dieser Überlegungen ist nun, dass sich Gleichung (2.7) als *verallgemeinertes Eigenwertproblem* schreiben läßt.

$$\sigma \underline{\underline{\mathbf{E}}} \vec{x} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} \vec{x} \quad (2.10)$$

Unter weiterer Ausnutzung der Systemsymmetrien, wie etwa der Tatsache, dass das System in  $\varphi$ -Richtung  $2\pi$ -periodisch ist

$$\vec{u}(r, \varphi, z, t) = \vec{u}(r, \varphi + 2\pi, z, t) \quad (2.11)$$

und der Annahme periodischer Randbedingungen

$$\vec{u}(r, \varphi, z, t) = \vec{u}(r, \varphi, z + \lambda, t), \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (2.12)$$

bietet es sich an die Lösung in  $\varphi$  und  $z$  nach diskreten Fouriermoden zu entwickeln.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} (r, \varphi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,m} \begin{pmatrix} \hat{u}(r) \\ \hat{v}(r) \\ \hat{w}(r) \\ \hat{p}(r) \end{pmatrix} e^{i(nkz+m\varphi)+\sigma t} + c.c. \quad (2.13)$$

Dieser Lösungsansatz (2.13) ist nun in der Lage, mit den entsprechenden Vorfaktoren, jede beliebige Störfunktion darzustellen. Dabei stellen die  $c_{n,m}$  die Fourier-Koeffizienten dar während die komplette  $r$  Abhängigkeit in die *Eigenmoden*  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}$  gewandert ist. Es sei noch auf die hierbei wichtigen konjugiert komplexen Funktionen (*c.c.*) hingewiesen, die mit hinzuaddiert werden müssen, da es sich um physikalisch reelle Felder handelt. Mit Hilfe dieses Entwicklungsansatzes (2.13) lassen sich durch Einsetzen des selbigen in die Gleichungen (2.5), (2.6) die darin enthaltenen Differentialoperatoren teilweise wie folgt auswerten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \sigma \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &\rightarrow im \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow ink \\ \nabla^2 &\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \\ &= \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \\ \vec{u} \cdot \nabla &\rightarrow u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{imv}{r} + inkw \\ \vec{u}_G \cdot \nabla &\rightarrow \frac{imv_G}{r} + inkw_G \end{aligned} \quad (2.14)$$

Somit wird durch den Lösungsansatz (2.13) das System *partieller Differentialgleichungen* (2.5) in ein System *gewöhnlicher Differentialgleichungen* umgewandelt. Dieses muss für jeden Summanden in der Fourierreihe, also jedes Paar  $(n, m)$  bzgl.  $r$  gelöst werden. Insgesamt ergibt sich somit ein sechsdimensionaler Parameterraum der von  $(\eta, R_1, R_2, Re, m, k)$

aufgespannt wird, wobei das System für jedes fixierte 6 Tupel neu gelöst werden muss.

$$\begin{aligned}
\sigma u &= \left[ \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \right] u \\
&\quad - R_1 \left( \frac{imv_G}{r} + inkw_G \right) u \\
&\quad - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} imv + 2R_1 \frac{v_G v}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} \\
\sigma v &= \left[ \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \right] v \\
&\quad - R_1 \left[ \left( u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{imv}{r} + inkw \right) v_G + \left( \frac{imv_G}{r} + inkw_G \right) v \right] \\
&\quad - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} imu - \frac{1}{r} imp \\
\sigma w &= \left[ \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \right] w \\
&\quad - R_1 \left[ \left( u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{imv}{r} + inkw \right) w_G + \left( \frac{imv_G}{r} + inkw_G \right) w \right] - inkp \\
0 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} imv + inkz + \frac{u}{r} \\
\Leftrightarrow \sigma u &= \left( -\frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \right) u + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r} u - p \right) \\
&\quad - R_1 \left( \frac{imv_G}{r} + inkw_G \right) u \\
&\quad - \frac{2}{r^2} imv + 2R_1 \frac{v_G v}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} \\
\sigma v &= \left( -\frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \right) v + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} v + \frac{1}{r} v \right) \\
&\quad + \frac{im}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r} u - p \right) - 2 \left( R_1 A - \frac{im}{r} \right) u \\
&\quad - R_1 \left( \frac{im}{r} v_G + ikw_G \right) v - \frac{mk}{r} w \\
\sigma w &= \left( -\frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \right) w + \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} w \\
&\quad + ik \left( \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r} u - p \right) \\
&\quad - R_1 \left( \frac{im}{r} v_G + 2inkw_G \right) w - R_1 \frac{\partial}{\partial r} w_G u \\
0 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} imv + inkz + \frac{u}{r}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\sigma v &= \left( -\frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \right) v + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} v + \frac{1}{r} v \right) \\
&\quad + \frac{im}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r} u - p \right) - 2 \left( R_1 A - \frac{im}{r} \right) u \\
&\quad - R_1 \left( \frac{im}{r} v_G + ikw_G \right) v - \frac{mk}{r} w \\
\sigma w &= \left( -\frac{m^2}{r^2} - n^2 k^2 \right) w + \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} w \\
&\quad + ik \left( \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r} u - p \right) \\
&\quad - R_1 \left( \frac{im}{r} v_G + 2inkw_G \right) w - R_1 \frac{\partial}{\partial r} w_G u \\
0 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} imv + inkz + \frac{u}{r}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Die Gleichungen 2.16 enthalten noch Ableitungen 2-ter Ordnung, die auf ein Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung reduziert werden müssen. Zudem soll noch der Druck  $p$  aus den Gleichungen eliminiert werden. Die gängigste Methode, dies zu erreichen liegt in der zweifachen Rotationsbildung, wie sie häufig in der Literatur [1] zu finden ist. Hier wird aber anstelle dieses Verfahrens eine Substitution benutzt, wie sie schon in früheren Arbeiten, wie z.B. bei [28, 30] verwendet wurde.

$$\begin{aligned} X &:= \frac{\partial}{\partial r}u + \frac{1}{r}u - p \\ Y &:= \frac{\partial}{\partial r}v + \frac{1}{r}v \\ Z &:= \frac{\partial}{\partial r}w \end{aligned}$$

mittels der Kontinuitätsgleichung ergibt sich somit der Druck  $p$  zu:

$$p = -X - ikw - \frac{1}{r}imv \quad (2.17)$$

Zum besseren Verständnis der Substitution wurden bereits in den Gleichungen (2.16) die Terme in entsprechender Form aufgeschrieben und zusätzlich noch mit dem oben angeführten Farbcode für  $X, Y, Z$  versehen. Das so erhaltene *Eigenwertproblem* lautet:

$$\sigma \underline{\underline{\mathbf{E}}}^* \vec{x} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}^* \vec{x} \quad (2.18)$$

$$\text{mit } \underline{\underline{\mathbf{E}}}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

mit

$$\vec{y} = (u(r), v(r), w(r), X(r), Y(r), Z(r))^T \quad (2.20)$$

und

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{im}{r} & ik & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{m^2}{r^2} - n^2k^2 & -2(\frac{im}{r^2} - R_1\frac{v_G}{r}) & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ -R_1(\frac{im}{r}v_G + inkw_G) & -\frac{2m^2}{r^2} - n^2k^2 & -\frac{mk}{r} & \frac{im}{r} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 2(\frac{im}{r^2} - R_1A) & -R_1(\frac{im}{r}v_G + inkw_G) & -\frac{mk}{r} & -\frac{m^2}{r^2} - 2n^2k^2 & ink & 0 \\ -R_1\frac{\partial}{\partial r}w_G & -\frac{mk}{r} & -R_1(\frac{im}{r}v_G + inkw_G) & -\frac{m^2}{r^2} - 2n^2k^2 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Im Folgenden kann man sich auf die Fälle für  $n = 1$  beschränken, da die höheren Harmonischen der Störung  $e^{nkz}$  für die Stabilitätsanalyse keine Rolle spielen. Um nun die linearen *Eigenmoden*  $u, v, w, x, y, z$  mittels *Runge-Kutta-Verfahren* (siehe Anhang) aus dem Eigenwertproblem (2.18) bestimmen zu können, wird dieses wie folgt umgeschrieben (für  $n = 1$ ):

$$\frac{\partial}{\partial r} \vec{x} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}^{**} \vec{x} \quad (2.22)$$

Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem beschreibt das temporäre Verhalten einer Störung bei vorgegebenen  $m$  und  $nk$ , mit

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}^{**} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & -\frac{im}{r} & -ik & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sigma + \frac{m^2}{r^2} + k^2 & 2\left(\frac{im}{r^2} - R_1 \frac{v_G}{r}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +R_1\left(\frac{im}{r}v_G + ikw_G\right) & & & & & \\ -2\left(\frac{im}{r^2} - R_1A\right) & \sigma + \frac{2m^2}{r^2} + k^2 & \frac{mk}{r} & -\frac{im}{r} & 0 & 0 \\ +R_1\left(\frac{im}{r}v_G + ikw_G\right) & & & & & \\ R_1 \frac{\partial}{\partial r} w_G & \frac{mk}{r} & \sigma + \frac{m^2}{r^2} + 2k^2 & -ik & 0 & -\frac{1}{r} \\ & & +R_1\left(\frac{im}{r}v_G + ikw_G\right) & & & \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

bzw. mit der Substitution  $\alpha := \sigma + \frac{m^2}{r^2} + k^2 + R_1\left(\frac{im}{r}v_G + ikw_G\right)$ :

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}^{**} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & -\frac{im}{r} & -ik & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 2\left(\frac{im}{r^2} - R_1 \frac{v_G}{r}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\left(\frac{im}{r^2} - R_1A\right) & \alpha + \frac{m^2}{r^2} & \frac{mk}{r} & -\frac{im}{r} & 0 & 0 \\ R_1 \frac{\partial}{\partial r} w_G & \frac{mk}{r} & \alpha + k^2 & -ik & 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Bei den beiden, in (2.23) und (2.24), auftretenden Geschwindigkeitsprofilen  $v_G$  und  $w_G$  handelt es sich um die Geschwindigkeiten des Grundzustandes in azimuthaler- bzw. axialer Richtung. Die Lösung dieser wurde bereits in (1.12),(1.18) explizit angegeben, und soll deshalb hier nur der Vollständigkeit halber angegeben werden:

$v_G := v_{CCF}(r)$  wird gelöst durch:  $v_{CCF}(r) = Ar + \frac{B}{r}$  (Anmerkung: Es ist auch gerade diese Integrationskonstante  $A$ , die in der Matrix (2.24) zu finden ist.) und

$w_G := w_{APF}(r)$  mittels  $w_{APF}(r) = Re^{\frac{r^2 + C \ln(r) + D}{E}}$ . Die Randbedingungen bleiben unverändert wie aus (2.6) bereits bekannt.

$$\vec{u}(r = \frac{\eta}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$\vec{u}(r = \frac{1}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Zur Bestimmung der linearen Eigenmoden  $u(r), v(r), w(r), x(r), y(r), z(r)$  ist es nun notwendig das sechsdimensionale Differentialgleichungssystem (2.22) aufzuintegrieren. Dies geschieht hier unter Zuhilfenahme eines vierstufigen *Runge-Kutta-Verfahrens* (siehe Anhang). Dies ist ein allgemeines Verfahren zur numerischen Lösung von *Anfangswertproblemen (AWP)*, deren Anfangsbedingungen festgelegt sind. Im hier vorliegenden Fall handelt es sich jedoch um ein *Randwertproblem (RWP)*, dessen sechs Randbedingungen nur auf einem Teil des Randes festgelegt sind.

Das Problem besteht darin, dass für die einzelnen Eigenmoden  $u(r), v(r), w(r)$  jeweils eine Randbedingung am inneren und für die jeweilige Eigenmode eine zweite am äußeren Zylinder zu erfüllen ist. Aufgrund der vorliegenden *no-slip-Randbedingungen* (2.25), (2.26) müssen die Geschwindigkeitseigenmoden  $u(r), v(r), w(r)$  auf beiden Rändern also bei  $r = \frac{\eta}{1-\eta}$  und  $r = \frac{1}{1-\eta}$  verschwinden.

Zur Lösung des Randwertproblems wird das *Shooting-Verfahren* (siehe Anhang) verwendet. Das Prinzip dieses Verfahrens beruht darauf, die Randbedingungen am inneren Zylinder durch geeignete Startvektoren zu erfüllen und die DGL (2.22) für verschiedene linear unabhängige Startvektoren aufzuintegrieren. Die hieraus erhaltenen Geschwindigkeitseigenmoden werden dann so linearkombiniert, dass sie die Randbedingungen am äußeren Zylinder erfüllen. Explizit bedeutet dies, dass drei linear unabhängige, komplexwertige Startvektoren wie z.B.

$$\vec{X}_1|_{r=r_1} = \begin{pmatrix} (0; 0) \\ (0; 0) \\ (0; 0) \\ (1; 0) \\ (0; 0) \\ (0; 0) \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2|_{r=r_1} = \begin{pmatrix} (0; 0) \\ (0; 0) \\ (0; 0) \\ (0; 0) \\ (1; 0) \\ (0; 0) \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_3|_{r=r_1} = \begin{pmatrix} (0; 0) \\ (0; 0) \\ (0; 0) \\ (0; 0) \\ (0; 0) \\ (1; 0) \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\text{wobei } (x; y) := x + iy, x, y \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

benötigt werden

Diese Wahl genügt der Bedingung (2.25). Um aber auch noch (2.26) zu erfüllen, müssen die durch das Runge-Kutta-Verfahren aufintegrierten Moden am äußeren Rand nun so kombiniert werden, dass sie zusammen Null ergeben. Man erhält das folgende System, das es zu lösen gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \Big|_{r=r_2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

Diese besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  verschwindet. ( $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}(R_1, R_2, Re, m, \eta, k)$ )

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0 \quad (2.30)$$

Dies ist die *Lösbarkeitsbedingung* des Systems. Zur Nullstellenberechnung wurde das *Newton-Raphson-Verfahren* (siehe Anhang) verwendet.

Der gewonnene Lösungsvektor  $(a_1, a_2, a_3)^T$  ist aufgrund der Linearität von (2.22) und der verschwindenden Determinante (2.30), nur bis auf einen Faktor bestimmt, d.h. auch  $c(a_1, a_2, a_3)^T$  mit  $c \in \mathbb{C}$  ist eine Lösung. Äquivalent dazu kann auch eines der  $a_i$  frei gewählt werden. Aus dem verbleibenden  $2 \times 2$  System sind die beiden anderen  $a_i$ 's durch Invertierung bestimmbar, so dass der Vektor

$$\vec{X}(r) = a_1 \vec{X}_1(r) + a_2 \vec{X}_2(r) + a_3 \vec{X}_3(r) \quad (2.31)$$

die lineare Eigenmode des Systems darstellt, da er alle Randbedingungen erfüllt.

Zusammenfassend läßt sich festhalten, dass die temporäre Entwicklung der Eigenmoden (also der Störungen) durch den i.A. komplexen Eigenwert  $\sigma$  bestimmt werden. Dabei besitzen Real- und Imaginärteil von  $\sigma = \gamma - i\omega$  unterschiedliche Bedeutungen:

$$\operatorname{Re}[\sigma] = \gamma : \text{Wachstumsrate}, \quad \operatorname{Im}[\sigma] = -\omega : \text{Frequenz bzgl. Störung}$$

Entscheidend, ob eine Störung mit der Zeit wieder verschwindet oder gemäß des Ansatz' (2.13) exponentiell anwächst, ist der Realteil  $\gamma$ . Somit kann das System, abhängig von  $\gamma$  in drei Bereiche unterteilt werden: Für  $\gamma < 0$  ist das System *unterkritisch*, entsprechend für  $\gamma > 0$  *überkritisch*. Für  $\gamma = 0$  bezeichnet man das System als marginal stabil.

Die Determinante der Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  hängt von insgesamt acht reellen Parametern ab, den sechs reellen Parametern  $R_1, R_2, Re, m, \eta, k$  sowie dem komplexen Eigenwert  $\sigma$ . Es werden immer sechs dieser Parameter fixiert, um die Lösbarkeitsbedingung (2.30) zu erfüllen und die zwei verbleibenden Größen mittels eines Nullstellenfinders (hier: *Newton-Raphson-Verfahren*) bestimmt.

Die beiden grundlegenden Aufgabenstellungen sehen also wie folgt aus:

1. Ermittlung der marginalen Stabilitätsgrenze (d.h.  $\operatorname{Re}[\sigma] = \gamma = 0$ ):

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}(R_1, \omega) \Big|_{R_2, Re, k, m, \eta, \gamma=0} = 0 \quad (2.32)$$

2. Berechnung der komplexen Eigenwerte  $\sigma$ :

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\sigma) \Big|_{R_1, R_2, Re, k, m, \eta} = 0 \quad (2.33)$$

## 2.2 Eigenwerte

Nachdem die Theorie zur Berechnung der Eigenwerte im vorangegangenen Abschnitt diskutiert wurde, sollen diese nun exemplarisch für verschiedene Strukturen  $M$ , bzw. deren Moden  $m$  berechnet werden. Wie gesehen führt der allgemeine Lösungsansatz (2.13) der linearisierten NSE auf ein Eigenwertproblem, wobei der zeitliche Eigenwert  $\sigma$  die entscheidende Rolle für die Stabilitätsanalyse spielt. Dieser ist für die temporale Entwicklung einer Störung mit der Wachstumsrate  $\gamma := \text{Re}[\sigma]$  und der Frequenz der Störung  $\omega := \text{Im}[\sigma]$  verantwortlich. Demzufolge entscheidet der Eigenwert für leicht überkritische Werte darüber ob ein Zustand *absolut stabil* oder *konvektiv-* bzw. *absolut instabil* ist, worauf in Kapitel 4 näher eingegangen wird.

Numerisch ergeben sich die Eigenwerte aus den Lösbarkeitsbedingungen (2.32),(2.33). Im Folgenden sind die mittels (2.33) berechneten Eigenwerte für unterschiedliche Strukturen  $M$  in den Abb. 2.1 - 2.4 dargestellt:

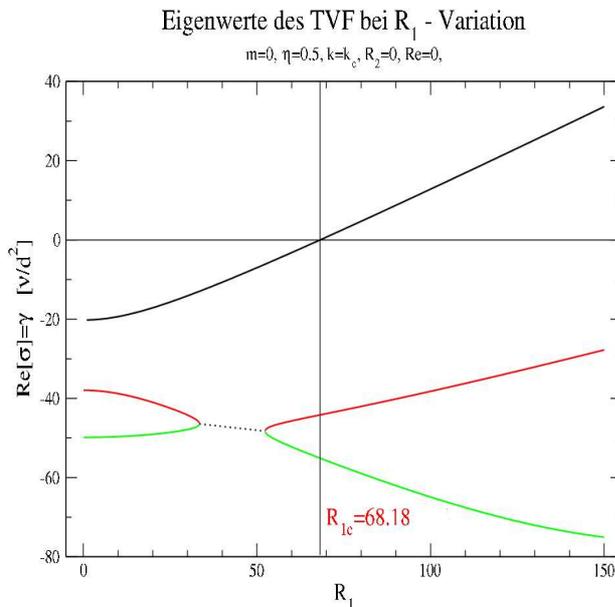


Abbildung 2.1:  $\text{Re}[\sigma(R_1)] = \gamma(R_1)$  der  $m = 0$  Mode des TVF für  $\eta = 0.5, k = k_c$ . Kontrollparameter:  $R_2 = 0, Re = 0$

Im einfachsten Fall des TVF ohne Durchfluss  $Re = 0$  sind die zugehörigen Eigenwerte rein reell oder treten komplex konjugiert auf, wie in Abb. (2.1) gut zu erkennen. Eine Erklärung hierfür findet sich bei genauerer Betrachtung der Gleichung (2.18) mit der zugehörigen Matrix (2.21). Indem man bei dieser die letzte Zeile mit  $i$  multipliziert und die Transformationen  $w \rightarrow iw$ , sowie  $z \rightarrow iz$  darauf anwendet, stellt man fest, dass die rechte Seite der Gleichung rein reell wird, was eine Erklärung der gefundenen Eigenwerte darstellt. Dabei ist der größte Eigenwert (hier schwarz), also gerade derjenige, der verantwortlich für die Stabilitätsgrenze ist, im Falle des TVF rein reell. Bei endlichem Durchfluss  $Re \neq 0$  sind die komplex konjugierten Eigenwert-Paare nur durch Betrachtung beider Durchflussrichtungen mit betragsmäßig identischen Durchflüssen zu finden. Die entsprechende Operation

bzgl.  $M \neq 0$  Strukturen lauten diesbezüglich:  $M \rightarrow -M$  und  $Re \rightarrow -Re$ . Die in den Abb. 2.1 - 2.4 dargestellten Kurven entsprechen den drei jeweils größten Eigenwerten als Funktion von  $R_1$  (schwarz:=größter Eigenwert). Wie schon zuvor angesprochen ist der größte Eigenwert im Fall des TVF rein reell, während die anderen beiden abschnittsweise rein reell, bzw. rein imaginär sind. Für  $M \neq 0$  Strukturen tritt diese strikte Trennung der Eigenwerte  $\sigma$  in Real- und Imaginärteil, wie in den Abb. 2.2 - 2.4 zu sehen, nicht mehr auf. Hierbei sind alle Eigenwerte  $\sigma$  komplex. Gleiche farbkodierte Linien bzgl. Real- und Imaginärteil in den Abbildungen gehören zum gleichen Eigenwert.

In den Abbildungen wurde weiterhin noch die 'Nulllinie' des Wachstumsparameters  $\gamma$  eingezeichnet, da der Eigenwert mit dem größten Realteil beim Durchgang durch diese die Stabilitätsschwelle des Grundzustands darstellt. D.h. Eigenmoden zu Eigenwerten mit  $Re[\sigma] = \gamma > 0$  sind wachstumsfähig. Demzufolge markiert der Schnittpunkt den jeweiligen kritischen Wert  $R_{1c}$ .

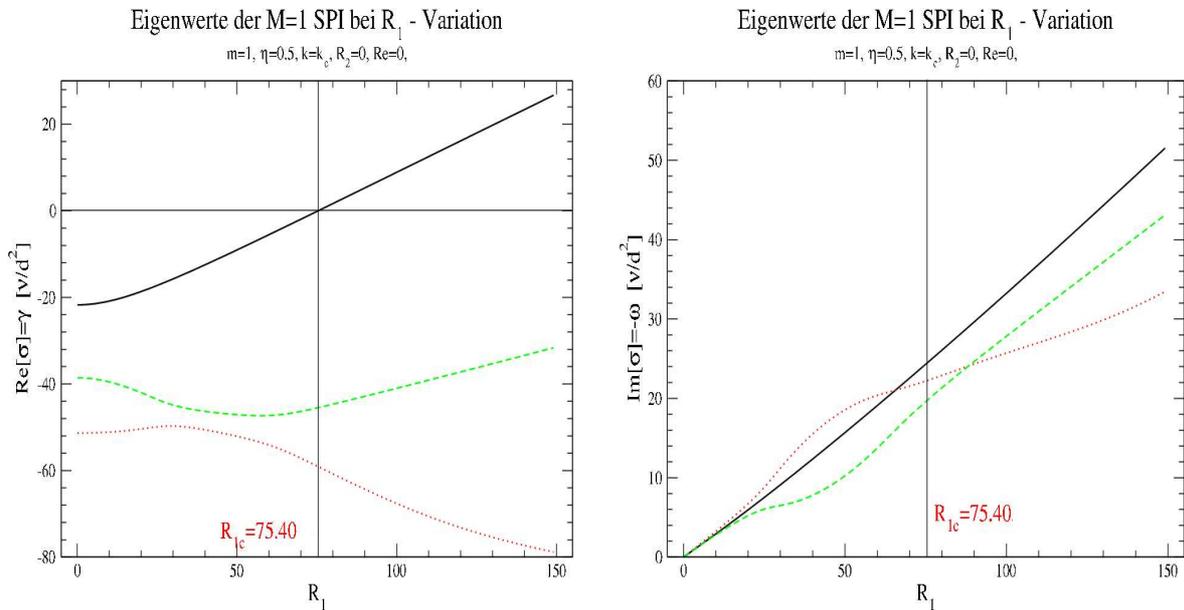


Abbildung 2.2:  $Re[\sigma(R_1)] = \gamma(R_1)$  und  $Im[\sigma(R_1)] = \omega(R_1)$  der  $m = 1$  Mode einer L1-SPI für  $\eta = 0.5, k = k_c$ . Kontrollparameter:  $R_2 = 0, Re = 0$

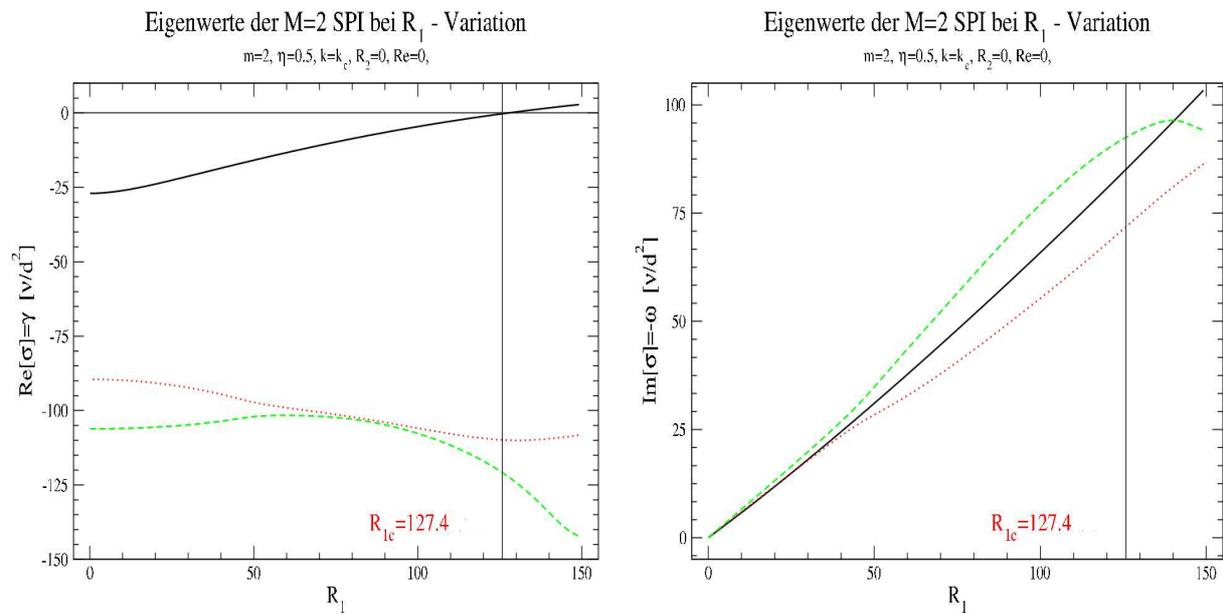


Abbildung 2.3:  $Re[\sigma(R_1)] = \gamma(R_1)$  und  $Im[\sigma(R_1)] = \omega(R_1)$  der  $m = 2$  Mode einer L2-SPI für  $\eta = 0.5, k = k_c$ . Kontrollparameter:  $R_2 = 0, Re = 0$

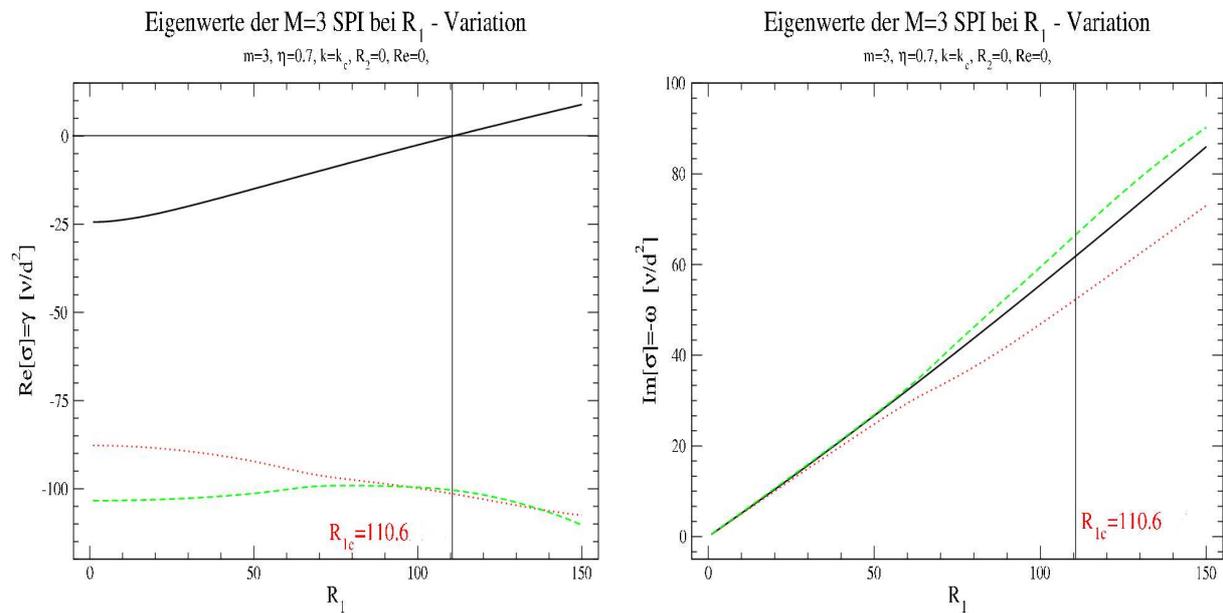


Abbildung 2.4:  $Re[\sigma(R_1)] = \gamma(R_1)$  und  $Im[\sigma(R_1)] = \omega(R_1)$  der  $m = 3$  Mode einer L3-SPI für  $\eta = 0.5, k = k_c$ . Kontrollparameter:  $R_2 = 0, Re = 0$

## 2.3 Marginale Stabilitätskurven und kritische Werte

Im Folgenden werden die marginalen und kritischen Stabilitätskurven des Grundzustandes, der eine Superposition aus CCF und APF darstellt, so wie primär herausbifurkierende Strukturen, in Abhängigkeit der Kontrollparameter, wie Radienverhältnis  $\eta$ , Durchfluss  $Re$  und äusserer Rotationszahl  $R_2$  diskutiert.

Die Kurven geben einen Überblick bezüglich des Stabilitätsverhaltens des Grundzustandes gegenüber Taylor-Wirbel TVF und Spiralwirbeln SPI. Hierbei steht  $k$  für die axiale,  $M$  für die azimutale, strukturbildende Wellenzahl und  $m$  für die verschiedenen angeregten Moden. Dieses Kapitel dient der Gewinnung eines allgemeinen Überblicks des Stabilitätsverhaltens im Taylor-Couette System verschiedener  $M$  und deren Verhalten bei Änderung einzelner Kontrollparameter, wie z.B.  $Re, R_2$ . Im folgenden Kapitel werden dann, wie zu Anfang beschrieben, fast ausschließlich L2-SPI und deren Eigenschaften untersucht.

### 2.3.1 Marginale Stabilitätskurven

Mittels der Lösbarkeitsbedingung (2.32) können die sogenannten marginalen Werte berechnet werden, für die der Grundzustand gegenüber einer entsprechenden Störung gerade noch marginal stabil bleibt. In der folgenden Abb. 2.5 ist die marginale Reynoldszahl  $R_{1,marg}$  für verschiedene Durchflusszahlen  $Re$ , bei festgehaltenem äußeren Zylinder  $R_2 = 0$  aufgetragen. Diese Kurven stellen die sogenannten *marginalen Stabilitätskurven* dar. Sie markieren den Stabilitätsbereich, was bedeutet, dass Störungen oberhalb dieser Kurven wachstumsfähig sind, wohingegen sie unterhalb dieser mit der Zeit weggedämpft werden und verschwinden, so dass der Grundzustand stabil ist. Hierin liegt auch die entscheidende Bedeutung der linearen Stabilitätsanalyse. Denn diese marginalen Kurven, hier gilt gerade  $\gamma = 0$ , markieren die Bifurkationsschwelle von nichtlinearen Lösungen. Somit bildet die lineare Analyse den Ausgangspunkt für weitere nichlinear, komplexere Untersuchungen.

#### Externer Durchfluss $Re$

In Abb. 2.5a ist deutlich zu erkennen, dass positive  $Re$  beim TVF eine stabilisierende Wirkung auf den Grundzustand besitzt, da sich die Kurven mit zunehmend positivem Durchfluss  $Re > 0$  zu größeren Werten  $R_{1,marg}$  hin verschieben. Vollkommen analog hierzu verhält sich auch die R1-SPI in Abb. 2.5b. Im Gegensatz zu diesen Lösungen tritt die stabilisierende Wirkung des Durchflusses bei der L1-SPI in Abb. 2.5c für Durchflusszahlen  $Re < 11$  noch nicht auf; in diesem Bereich wirkt selbiger zunächst destabilisierend, für große Werte aber ebenfalls stabilisierend. Diese Destabilisierung ist bei  $Re = 5$  deutlich zu erkennen, indem die marginale Stabilitätskurve unter diejenige für  $Re = 0$  verschoben wird. Dieser Effekt, der unterschiedlichen Auswirkung von  $Re$  auf die L1-SPI, ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass diese ohne Durchfluss in entgegengesetzte Richtungen propagieren würden. Bei Durchfluss liegt somit eine Symmetriebrechung vor. Genügend große Durchflusszahlen  $|Re| > 20$  wirken jedoch auf beide Strukturen stabilisierend. In Abb. 2.5d ist die Auswirkung des Durchflusses auf die L2-SPI dargestellt. Wie schon bei der L1-SPI beob-

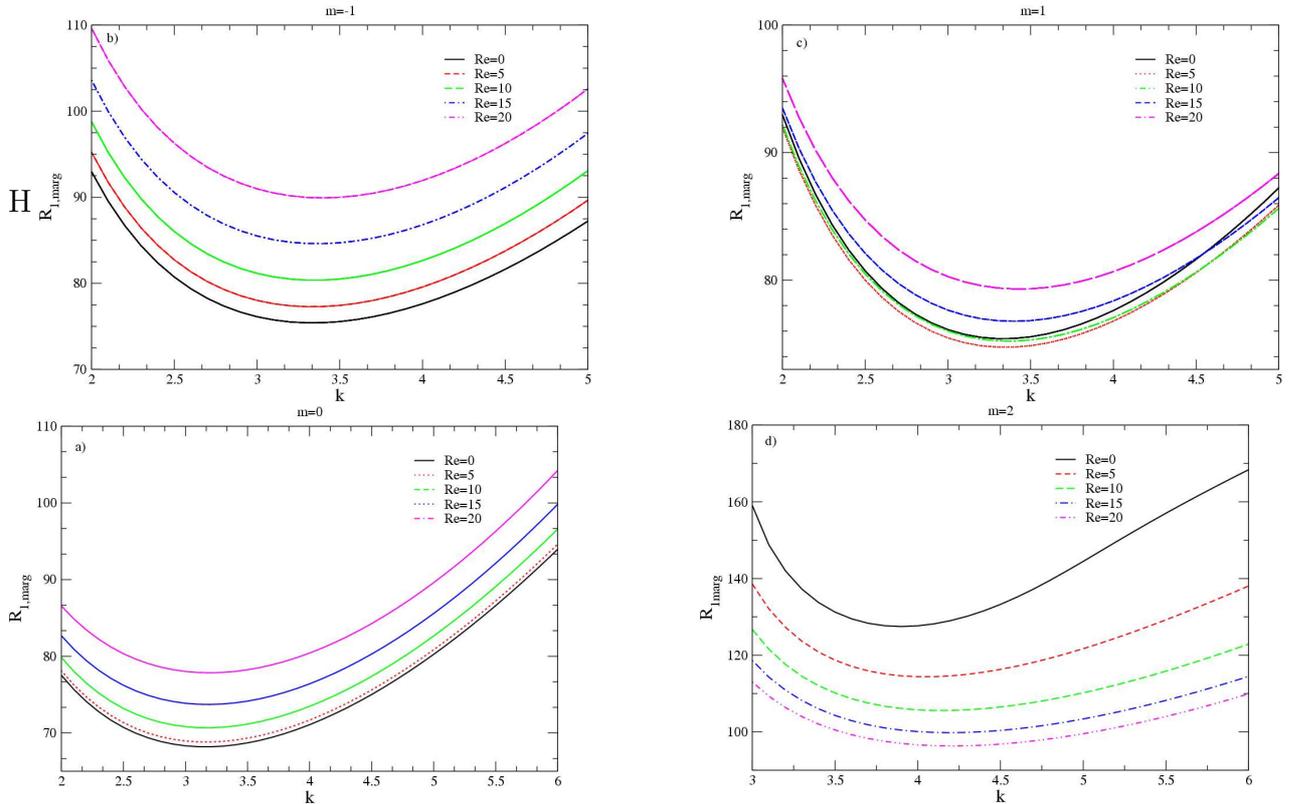


Abbildung 2.5: Marginale Stabilitätskurven  $R_{1,marg}(k)$  von  $M = 0, \pm 1, 2$  Strukturen für unterschiedliche  $Re$  und  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = 0$

achtet, so führt positives  $Re$  zur Destabilisation, diesmal auch für größere  $Re$ . Desweiteren ist zu erkennen, dass die Stabilitätsschwellen deutlich zu höheren  $R_1$  verschoben sind. z.B. liegt das Minimum der marginalen Stabilitätskurve für  $M = 2$  bei  $R_1 \approx 130$ , was fast dem doppelten Wert des Minimums für  $M = 1$  bei  $R_1 \approx 75$  entspricht.

Abb. 2.6 die Bifurkationsschwellen  $R_{1,marg}(Re)$  von TVF, 1-SPI Strukturen mit fester Wellenzahl  $k = 3.927$  als Funktion des Kontrollparameters  $Re$ . Die  $M = 0$  Schwelle (blau) zeigt im wesentlichen ein quadratisches Anwachsverhalten mit dem Durchfluss  $Re$ . Ebenso ist in den beiden anderen Lösungen  $M = \pm 1$  ein parabolisches Verhalten erkennbar, wobei das Minimum der Schwellen zu betragsmäßig größeren  $Re$  hin verschoben ist. Im Fall der L1-SPI (orange) bedeutet dies beispielsweise, dass die zugehörige Kurve für kleine positive  $Re > 0$  zunächst abfällt, um für weiter steigende  $Re > 0$  wieder anzuwachsen.

Es ist deutlich zu erkennen, dass die L1-SPI Schwelle für  $Re \rightarrow -Re$  das Spiegelbild der R1-SPI Schwelle darstellt. Diese Spiegelsymmetrie gilt ganz allgemein für alle Strukturen  $M \geq 1$ . Kleine  $Re$  destabilisieren den CCF-APF Zustand (Grundzustand) gegenüber Spiralen die in Richtung des Durchflusses propagieren. Gleichzeitig stabilisieren sie diesen aber auch gegenüber Spiralen, welche gegen den Durchfluss propagieren. Für kleine bis

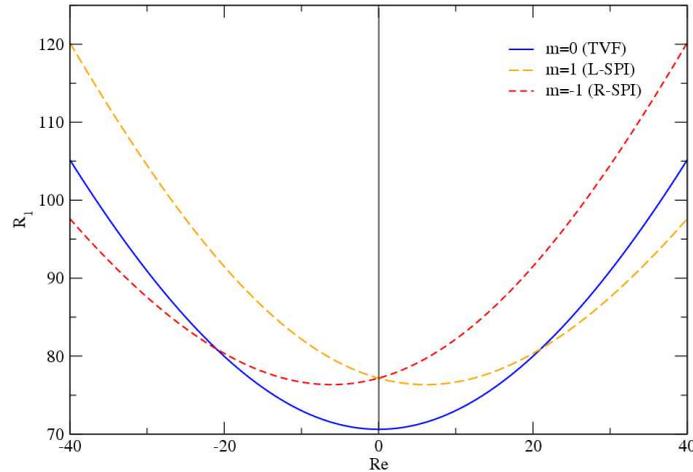


Abbildung 2.6: Bifurkationsschwellen  $R_{1,marg}(Re)$  von TVF, 1-SPI;  $R_2 = 0$ ,  $k = 3.927$ ,  $\eta = 0.5$

mittlere Durchflüsse  $-20 \leq Re \leq 20$  bifurkiert der TVF bei wachendem  $R_1$  als erstes aus dem Grundzustand heraus. Dieses ändert sich jedoch für größere  $Re$ , da die Kurve der Bifurkationsschwelle der TVF mit zunehmendem  $Re$  gegenüber jener der SPI stärker anwächst. Hinter dem Schnittpunkt  $Re > 21$  dieser beiden Kurven wechselt die Bifurkationsfolge und es entstehen zuerst (stabile) Spiralstrukturen aus dem Grundzustand.

### Bei gegenrotierendem Aussenzylinder

In Abb. 2.7 sind die marginalen Stabilitätskurven der Reynoldszahlen  $R_1$  unterschiedlicher Lösungen  $M$  für verschiedene Gegenrotationszahlen  $R_2$  des äußeren Zylinders bei festem Radienverhältnis  $\eta = 0.7$  aufgetragen. Im Allgemeinen liegen die Kurven für betragsmäßig kleine  $R_2$  unterhalb derer für betragsmäßig große. Dies bedeutet, dass der Grundzustand bei einer gegebenen Wellenzahl  $k$  mit Zunahme der Rotation  $R_2$  des äußeren Zylinders, weniger ‘anfällig‘ bezüglich Störungen wird; d.h. er wird stabiler. Eine Ausnahme stellt jedoch der Übergang  $R_2 \rightarrow 0$  dar: Für größere Wellenzahlen  $k > 6$  (vgl. Abb. 2.7a bei  $k \approx 6.5$ ) wird der Grundzustand abhängig von der betrachteten Struktur instabiler gegenüber Störungen. Eine Verkleinerung von  $R_2$  und die damit verbundene Minderung der äußeren Rotationsfrequenz  $\Omega_2$  wirkt zunächst destabilisierend. Für  $R_2 < -50$  aber erneut stabilisierend.

Weiterhin zeigt Abb. 2.8 welche Lösungen  $M$  bezüglich einer Störung linear instabil werden. Hierzu sind nun bei unterschiedlichen  $R_2$  die marginalen Kurven einzelner Strukturen  $M$  gegeneinander aufgetragen. Für  $R_2 > -100$  wird mit wachsendem  $R_1$  zuerst jeweils die  $M = 0$  Lösung instabil (Abb. 2.8a,b). Die Stabilitätsgrenzen der übrigen Strukturen ( $M > 0$ ) liegen bei höheren Reynoldszahlen  $R_1$ . Gleiches gilt auch für größere  $R_2$ , aller-

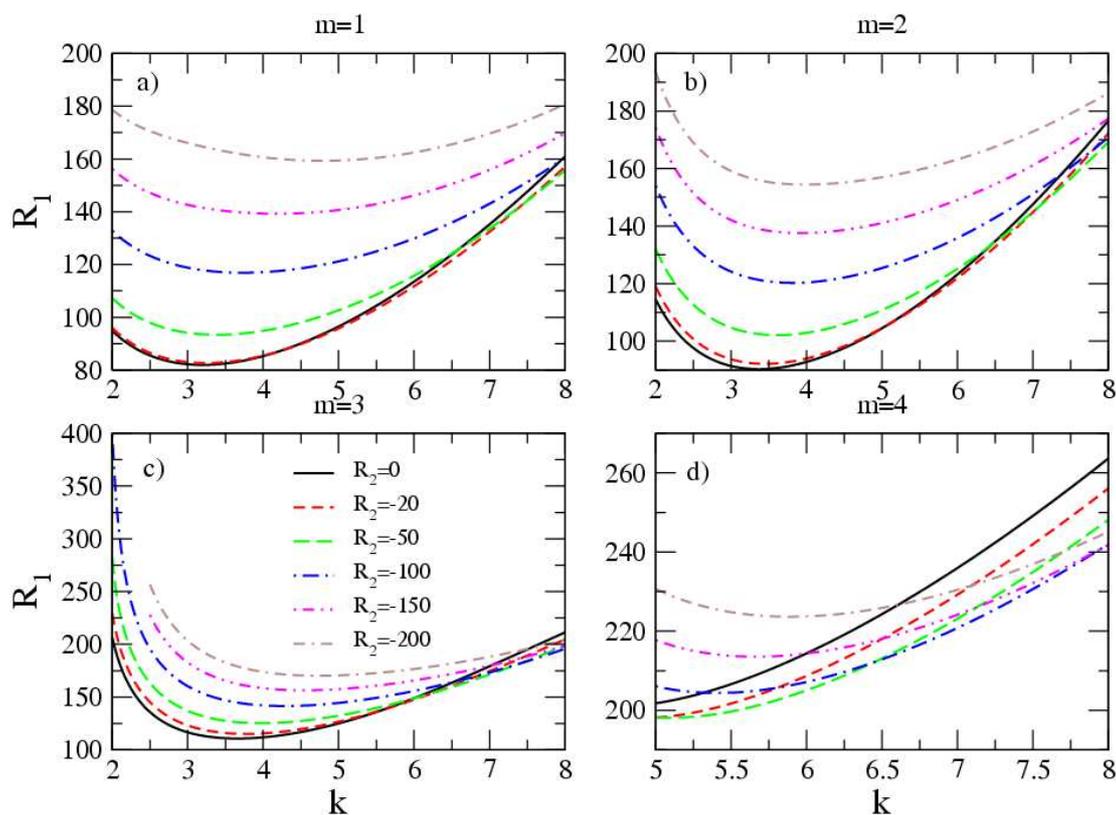


Abbildung 2.7: Abhängigkeit der marginalen Stabilitätsgrenzen  $R_{1,marg}(k)$  verschiedener Strukturen  $M$ , für unterschiedliche  $R_2$ ;  $\eta = 0.7$ ,  $Re = 0$

dings erst für ebenfalls größere  $k$  Werte. So z.B. bei  $R_2 = -100$  (Abb. 2.8c). Hier wird für kleine  $k$  Werte ( $k < 5.5$ ) zuerst  $M = 1$  und erst danach die  $M = 0$  Struktur instabil. Bei noch stärkeren Gegenrotationen  $R_2 < -150$  können sogar noch höhere  $M$  Strukturen als erstes instabil werden. So z.B. besitzt, wie in Abb. 2.8d zu sehen, die L2-SPI im Wellenzahlbereich  $2.9 < k < 4.9$  die niedrigste Stabilitätsgrenze. Insgesamt bleibt festhalten, dass mit Zunahme der Gegenrotation die Wellenzahl  $k$ , ab welcher zuerst die  $M = 0$  Lösung instabil wird, ebenfalls anwächst.

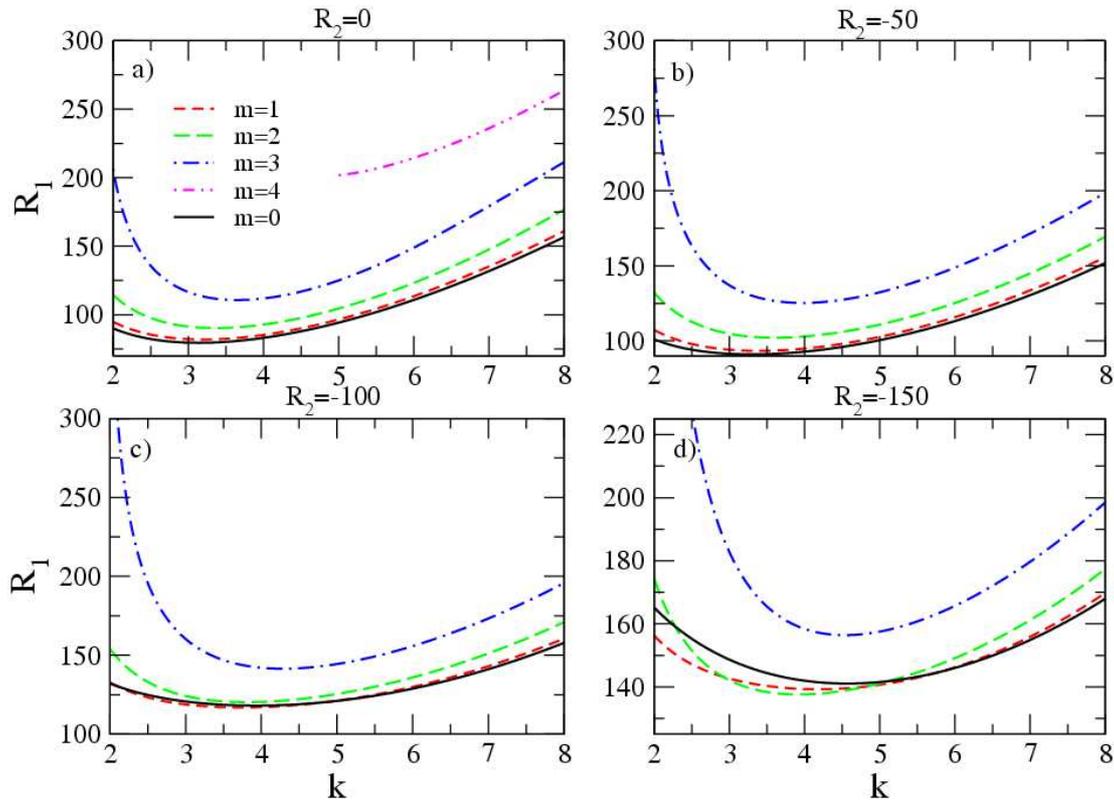


Abbildung 2.8: Marginale Stabilitätsgrenzen  $R_{1,marg}(k)$  unterschiedlicher  $R_2$ , für verschiedene Strukturen  $M$ . Kontrollparameter:  $\eta = 0.7$ ,  $Re = 0$

Wie bereits gesehen, haben sowohl der Durchfluss  $Re$ , als auch die Rotation des Außenzylinders  $R_2$  erheblichen Einfluß auf die Stabilität des Grundzustandes bezüglich L-, R-SPI und TVF. Hierzu sind in Abb. 2.9 die Bifurkationsschwellen  $R_{1,marg}(R_2, Re)$  der L1-SPI (orange), R1-SPI (rot) und TVF (blau) aufgetragen. Zudem wurden diese Bifurkationsschwellen noch auf die  $(Re, R_2)$  Ebene projiziert, wie in Abb. 2.10 zu sehen.

Es läßt sich feststellen, dass ein zunehmender positiver Durchfluss, unabhängig von der jeweiligen Struktur, die Bifurkationsschwelle  $R_{1,marg}(Re, R_2)$  im Allgemeinen nach oben verschiebt. Dies geschieht jedoch für die einzelnen Strukturen unterschiedlich stark. Demzufolge resultieren unterschiedliche Bereiche (A, B, C), in denen sich die Reihenfolge der Bifurkationsschwellen ändern. Die Trennung dieser Gebiete folgt mittels der Schnittkurve (schwarze Linie in Abb. 2.9, 2.10) der zwei jeweils am tiefsten liegenden Ebenen, wodurch sich die folgenden drei Bereiche mit entsprechenden Reihenfolgen der Stabilitäten ergeben.

- (A)  $L - SPI \Rightarrow TVF \Rightarrow R - SPI$
- (B)  $L - SPI \Rightarrow R - SPI \Rightarrow TVF$
- (C)  $TVF \Rightarrow L - SPI \Rightarrow R - SPI$

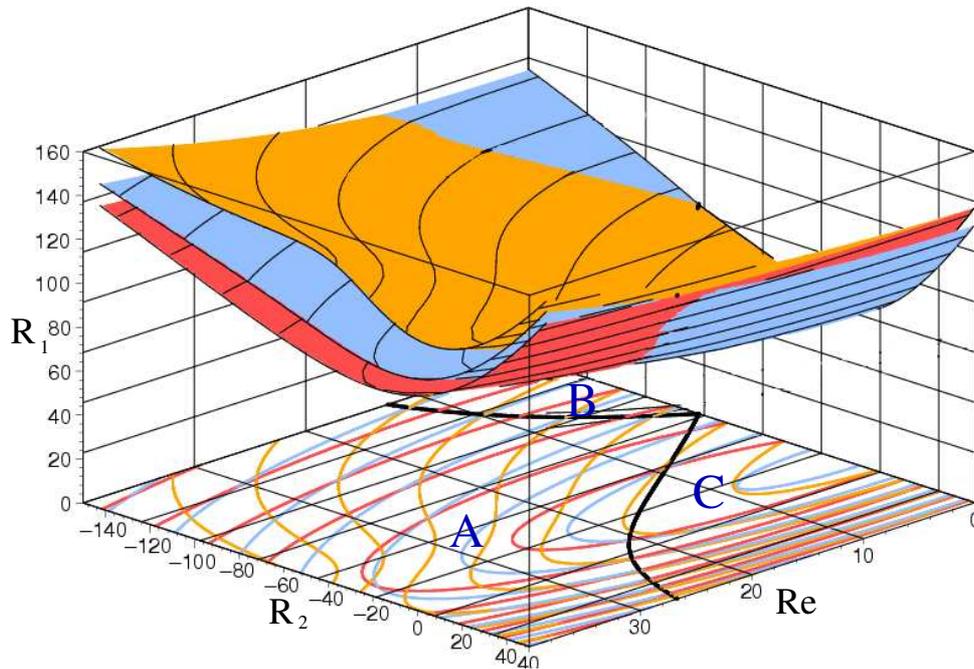


Abbildung 2.9: Bifurkationsschwellen  $R_{1,marg}(Re, R_2)$  von TVF und 1-SPI in Abhängigkeit von  $Re$  und  $R_2$ ;  $k = 3.827$ ,  $\eta = 0.5$  [38]

(A) stellt hierbei den deutlich größten Bereich dar, insbesondere für betragsgroße  $R_2$  und große  $Re$ . Der Bereich (B), der wie in der Abb. 2.9, 2.10 deutlich zu erkennen, den kleinsten Anteil besitzt, ist bei kleinen  $Re$  und betragsgroßen  $R_2$  angesiedelt. Schließlich ist der Bereich (C) durch vorwiegend positive Rotationszahlen  $R_2$ , sowie kleine bis mittelgroße  $Re$  ausgezeichnet.

Betrachtet man nun die Struktur für eine fest vorgegebenes  $R_2$ , d.h. man macht einen Schnitt in der  $(R_1, Re)$  Ebene aus Abb. 2.9, so findet man das Anwachsverhalten von  $R_{1,stab}(Re)$  in Abhängigkeit von  $Re$ , wie bereits zuvor diskutiert (z.B. Abb. 2.6). So destabilisiert für kleine  $Re$  und  $R_2$  (Bereich C) der Grundzustand als erstes gegenüber dem TVF. Dies ändert sich jedoch für stark gegenrotierende Zylinder (große  $|R_2|$ ). In diesem Fall verläuft die Bifurkationsschwelle der L1-SPI unterhalb derer für den TVF (Bereich B). Auch die bereits zuvor angesprochene, durch schwachen Durchfluss bedingte, Aufhebung der L- und R-SPI Entartung lässt sich erkennen. Dieser führt bei positivem Durchfluss zu einer Präferenz der L-SPI. Wird der Durchfluss zunehmend erhöht, so verringert sich die Gegenrotationen  $R_2$ , die notwendig ist, um die L-SPI Präferenz aufrecht zu halten (Grenze zw. den Bereichen (A) und (C)). Ab einem  $Re \gtrsim 26$  (vgl. Abb. 2.10 linker Rand) verschwindet diese schließlich vollkommen, so dass die L-SPI Lösung als erste aus dem Grundzustand herausbifurkiert.

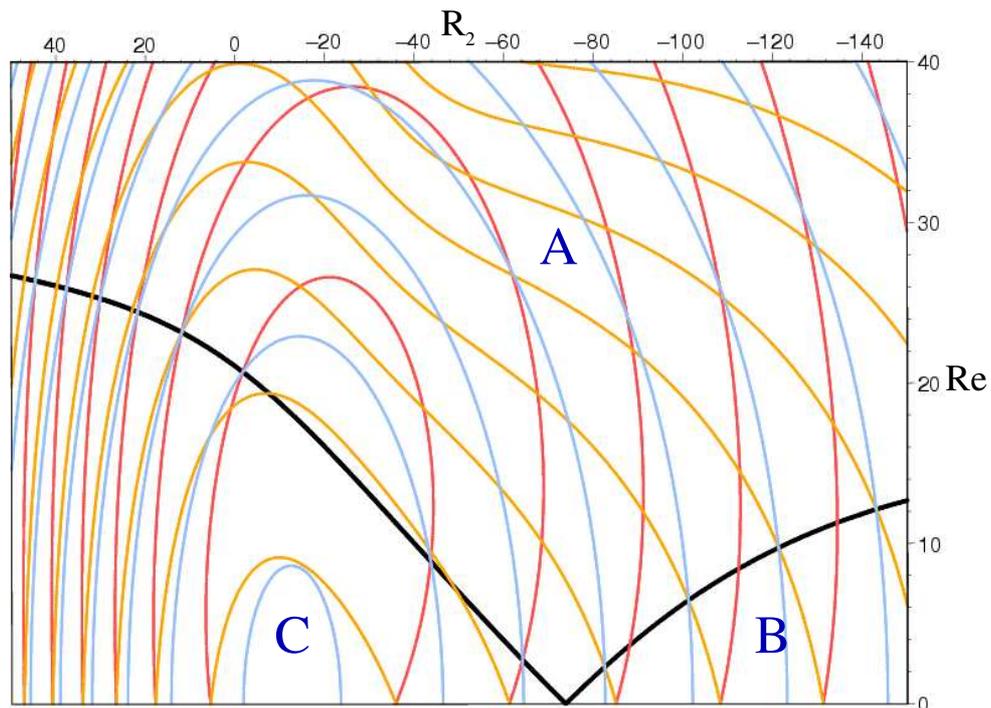


Abbildung 2.10: Projektion der in 2.9 zu sehenen Bifurkationsschwellen  $R_{1,marg}(Re, R_2)$  in die  $(R_2, Re)$  Ebene. Eingezeichnete Linien entsprechen Iso-  
linien (TVF: blau, L1-SPI: orange, R1-SPI: rot) der Bifurkationsflächen im  
Abstand  $\Delta R_1 = 20$ ; schwarze Linie markiert den Übergang der zuerst instabil  
werdenden Struktur.  $k = 3.827$ ,  $\eta = 0.5$  [38]

### Abhängigkeit vom Radienverhältnis $\eta$

Als letzte Untersuchung der Auswirkungen bei Änderungen der Systemgeometrie auf das System wurde die lineare Stabilitätsanalyse bei variierenden Radienverhältnissen  $\eta$  durchgeführt. Eine Verringerung des  $\eta$  Wertes bedeutet, dass der innere Radius kleiner wird, wohingegen dieser bei Vergrößerung anwächst. Es ist dabei zu erwähnen, dass die Spaltbreite aufgrund der verwendeten Entdimensionalisierung (Skalierung der Längeneinheiten mit Spaltbreite  $d$ ) immer konstant eins beträgt.

In Abbildung 2.11 sind die entsprechenden marginalen Stabilitätskurven  $R_{1,marg}(k)$  unterschiedlicher Strukturen  $M = 1..5$  bzgl.  $\eta$  aufgetragen. Im Fall des TVF und der L1-SPI zeigt sich mit zunehmendem  $\eta$  eine stetige Stabilisierung, indem sich die  $\eta$  abhängigen Kurven ohne Überschneidungen nach oben verschieben. Aber bereits bei der L2-SPI ändert sich dieses Stabilitätsverhalten. Bei dieser Struktur destabilisiert die  $\eta$  Zunahme den Grundzustand zunächst ( $0.65 < \eta < 0.7$ ), bevor sie für größere  $\eta$  erneut stabilisierende Wirkung besitzt. Dieses Verhalten der anfänglichen Destabilisation ist auch bei den übrigen Strukturen erkennbar, wie im Einzelnen den Graphiken entnommen werden kann. Für genügend große  $k$  (weit entfernt von den kritischen  $k_c$ , z.B.  $M = 3: k > 8.4$ ) besitzt die Zunahme von  $\eta$  durchweg eine stabilisierende Wirkung auf den Grundzustand, d.h. Kurven zu größeren  $\eta$  liegen immer oberhalb derer zu kleineren  $\eta$ .

Aus den Abbildungen 2.12, in denen die marginalen Stabilitätskurven  $R_{1,marg}(k)$  unterschiedlicher Strukturen  $M$  für festes  $\eta$  und  $Re = 0$  aufgetragen sind, erkennt man, dass die verschiedenen Lösungen nacheinander gemäß ihrer Strukturwellenzahl  $M$  instabil werden, d.h. zuerst  $M = 0$ , dann  $M = 1$  usw. Mit zunehmendem  $\eta$  verschieben sich die Minima der Kurven und somit die kritische Wellenzahl  $k_c$  zu höheren Werten. Diese Verschiebung der kritischen Werte ist ähnlich zu der schon bei auferlegtem Durchfluss  $Re$  und steigender Gegenrotation  $R_2$  des äußeren Zylinders diskutierten. Besonders auffallend ist, dass sich für große  $\eta$ ,  $\eta \rightarrow 1$ ,  $\eta = \frac{r_1}{r_2}$  die marginalen Stabilitätskurven zu sehr hohen Werten verschieben; d.h. je kleiner der Abstand  $d = r_2 - r_1$  zwischen den beiden Zylindern desto weniger anfällig ist der Grundzustand gegenüber äußeren Störungen. Als letztes sind in Abb. 2.13 noch exemplarisch die marginalen Stabilitätskurven für die verschiedenen Strukturen  $M = 0, 1, 2$  bei variierendem Radienverhältnis  $\eta$  aufgetragen.

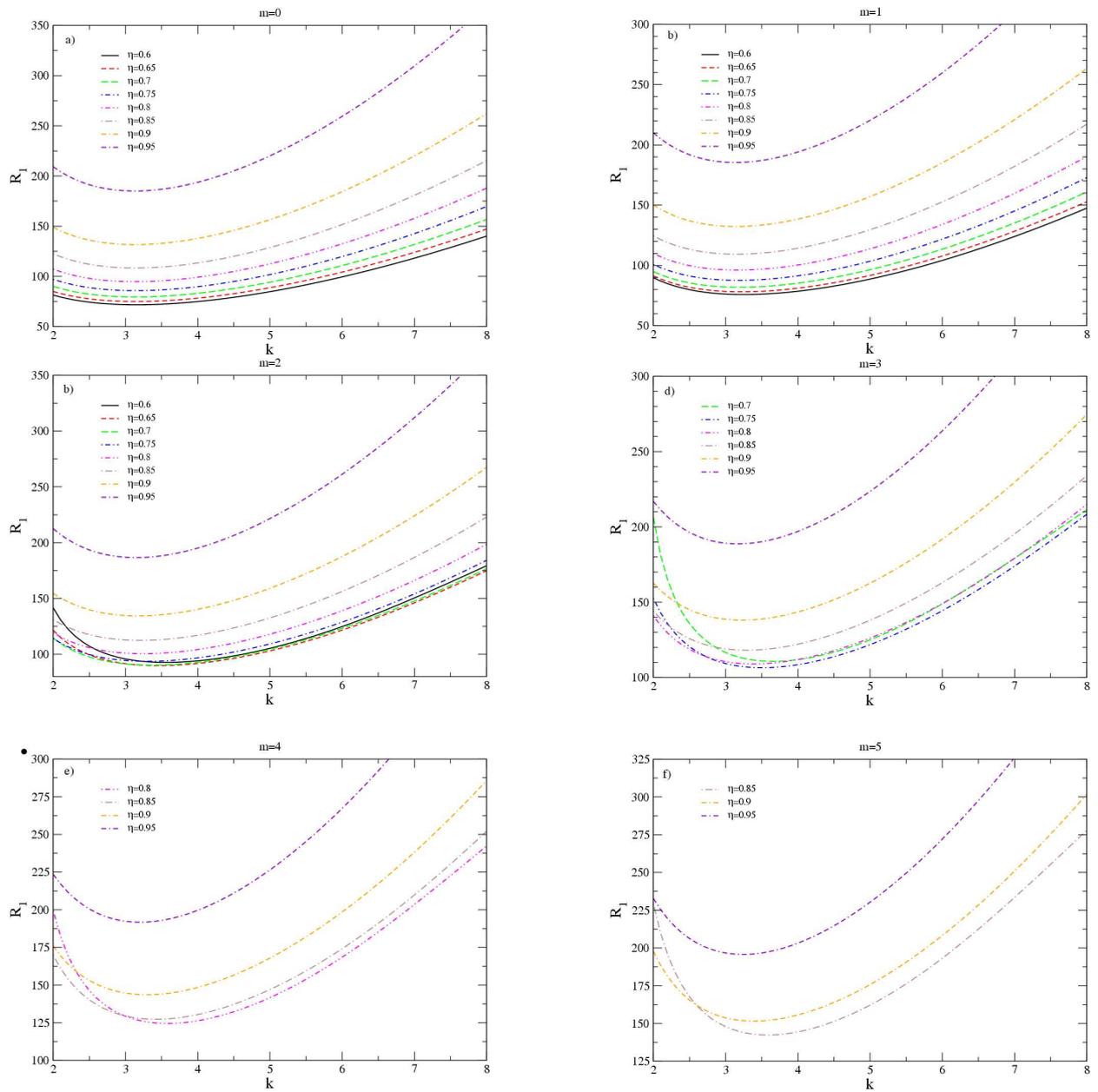


Abbildung 2.11: Marginale Stabilitätskurven  $R_{1,marg}(k)$  verschiedener Strukturen  $M$  für verschiedene  $\eta$ ;  $R_2 = 0$ ,  $Re = 0$ .

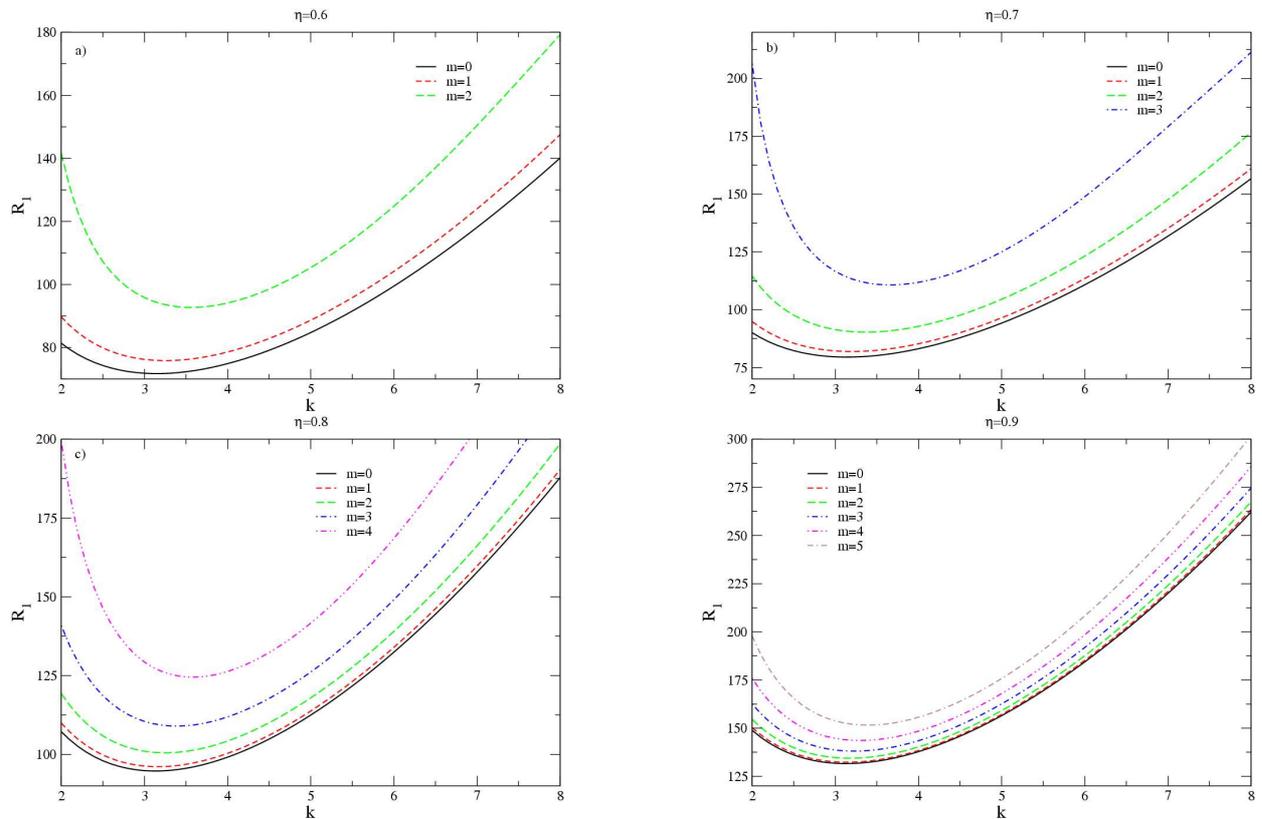


Abbildung 2.12: Marginale Stabilitätskurven  $R_{1,marg}(k)$  verschiedener Strukturen  $M$  bei jeweils fixiertem Radienverhältnis  $\eta$ ;  $R_2 = 0$ ,  $Re = 0$ .

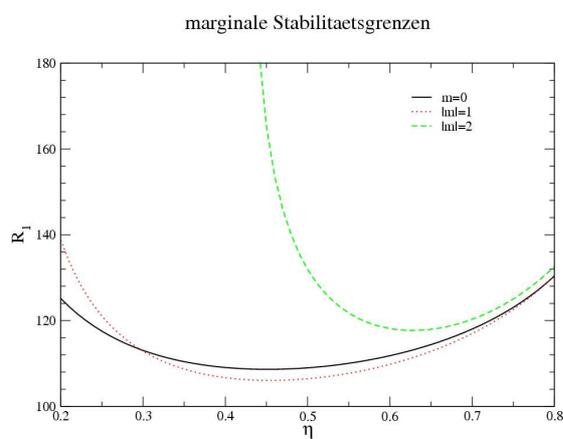


Abbildung 2.13: Marginale Stabilitätskurven  $R_{1,marg}(k)$  verschiedener Strukturen  $|M| = 0, 1, 2$  bei variierendem von  $\eta$  für feste Wellenzahl  $k = 3.927$ . Kontrollparameter:  $R_2 = -150$ ,  $Re = 0$

### 2.3.2 Kritische Werte

#### Externer Durchfluss $Re$

Das Minimum der jeweiligen marginalen Stabilitätskurve (vgl. z.B. Abb. 2.5) stellt gerade den Punkt  $(k_c, R_{1c})$  dar, bei dem die Störung mit der niedrigsten Reynoldszahl  $R_1$  wachstumsfähig wird. Diese Störungen werden als kritische Moden bezeichnet. Die zugehörigen Werte sind die *kritischen Werte*  $k_c, R_{1c}, \omega_c$ . Sie sind also unmittelbar durch Berechnung des Minimums aus den marginalen Stabilitätskurven zugänglich. Zunehmende Durchflusszahlen  $Re$  zeigen analog zu den marginalen Stabilitätskurven eine stabilisierende Wirkung. Im Allgemeinen läßt sich für 1-SPI festhalten:

$$R_{1c}(Re > 0) > R_{1c}(Re = 0)$$

#### Symmetriebeziehungen

Zur Untersuchung der Symmetrien des Systems werden die kritischen Werte für Durchflüsse  $Re$  von  $-20$  bis  $20$  bestimmt. Die Ergebnisse bzgl. der kritischen Frequenzen  $\omega_c$  sind in Abb. 2.14 dargestellt. Für den einfachsten Fall des TVF ergeben sich folgende allgemeine Symmetriezusammenhänge:

$$R_{1c}(-Re) = R_{1c}(Re), \quad k_c(-Re) = k_c(Re), \quad -\omega_c(-Re) = \omega_c(Re)$$

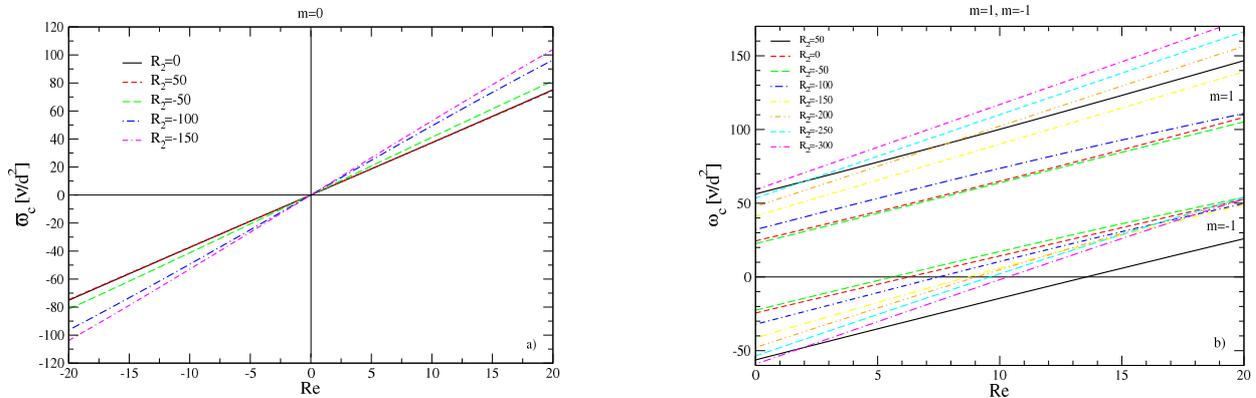


Abbildung 2.14: Kritische Frequenzen  $\omega_c(Re)$  als Funktion von  $Re$  für verschiedene  $R_2$  bei festem  $\eta = 0.5$ . links: TVF; rechts: 1-SPI. Hierbei sind nur die Ergebnisse für positive  $Re$  aufgetragen, die entsprechenden Werte für negative ergeben sich aus den Symmetrieoperationen ( $Re \rightarrow -Re$  und  $M \rightarrow -M$ ).

In der Abb. 2.14 ist ein deutlicher linearer Zusammenhang der kritischen Frequenz  $\omega_c$  bezüglich des Durchflusses  $Re$  feststellbar. In Abb. 2.14b wurden nur die ermittelten  $\omega_c$  für

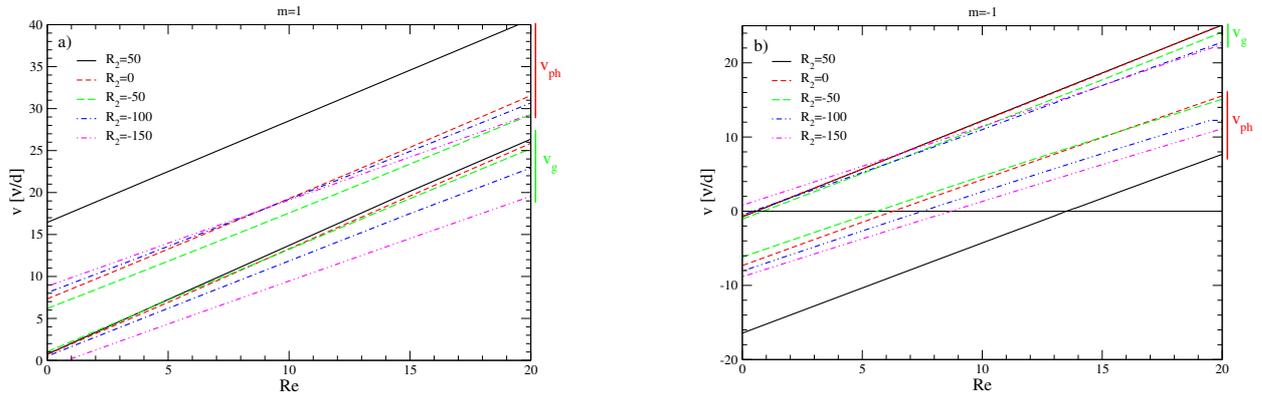


Abbildung 2.15: Vergleich der Gruppen-  $w_g(Re)$  und Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph}(Re)$  der 1-SPI bei Variation von  $Re$  für unterschiedliche  $R_2$  für  $\eta = 0.5$

positive  $Re$ , sowohl für die L1-SPI, als auch die R1-SPI aufgetragen. Die entsprechenden Werte im Bezug auf negative Durchflusszahlen  $Re < 0$  erhält man durch die entsprechenden Symmetrieoperationen  $Re \rightarrow -Re$  und  $M \rightarrow -M$ , welche durch separate Berechnung der einzelnen Lösungen überprüft wurde. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass man die  $\omega_c$  der L1-SPI bei negativem  $Re < 0$ , aus denjenigen der R1-SPI für positives  $Re > 0$  (in Abb. 2.14b erhält, indem man diese, sowohl um die  $Re = 0$  Achse, wie auch die  $\omega = 0$  Achse um  $180^\circ$  rotiert. Desweiteren sind die zugehörigen Nulldurchgänge  $\omega_c(Re = 0)$  der kritischen Frequenzen der unterschiedlichen Lösungen sichtlich gegeneinander verschoben. Geht dieser beim TVF (Abb. 2.14a) noch durch den Ursprung, so ist er bei der R1-SPI nach rechts und bei L1-SPI nach links verschoben (vgl. Abb. 2.14b). Im Fall  $M = 0$  liegen somit Ursprungsgeraden mit Punktsymmetrie vor. In den beiden anderen Fällen gilt aber offensichtlich  $\omega_c(Re = 0) \neq 0$ . Bei der L1-SPI sind die kritischen Frequenzen zu positiven und bei R1-SPI entsprechend zu negativen Werten hin verschoben. Letztendlich sind diese nichtverschwindenden  $\omega_c$  die Grundlage dafür, dass der Durchfluss  $Re$  beim TVF eine Bewegung der gesamten Struktur in axialer Richtung verursacht.

### 2.3.3 Systemspezifische Geschwindigkeiten

Nun soll auf die im vorherigen Abschnitt bereits angesprochene Dynamik im einzelnen etwas näher eingegangen werden. Hierzu ist es wichtig zwischen den beiden, die Lösung spezifizierenden Geschwindigkeiten zu unterscheiden. Diese sind die sogenannte Phasengeschwindigkeit  $w_{ph}$  und die Gruppengeschwindigkeit  $w_g$ <sup>1</sup>, erhalten aus der Dispersionsrelation  $\omega(k)$ . Die Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine 'Gruppe' von Wellen, d.h. ein Wellenpaket, als Ganzes durch das System bewegt. Übli-

<sup>1</sup>in Anlehnung an das in axialer Richtung verlaufende Geschwindigkeitsfeld  $w$ ; i.A. werden diese in der Literatur zumeist mit  $v_{ph}, v_g$  bezeichnet.

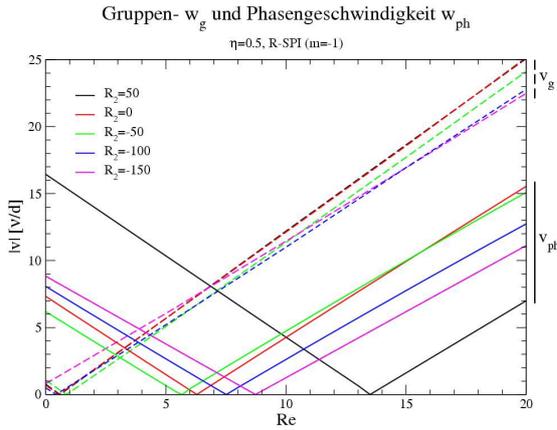


Abbildung 2.16: Absolutbeträge der Gruppen-  $|w_g(Re)|$  und Phasengeschwindigkeiten  $|w_{ph}(Re)|$  der 1-SPI bei Variation von  $Re$  für unterschiedliche  $R_2$  für  $\eta = 0.5$

cherweise bezieht sich diese auf einen charakteristischen Punkt des Paketes wie z.B. deren Maximum oder etwa das Minimum zwischen zwei solcher Wellenpakete (vgl. Abb. 4.2). An dieser Stelle soll nur ein kurzer Abriss über das Verhalten der beiden Geschwindigkeiten für 1-SPI gegeben werden, da insbesondere auf  $w_g$ , als ein Koeffizient der Ginzburg-Landau-Gleichung für 2-SPI in Abschnitt 3.1.4 noch näher eingegangen wird.

Zuerst sollen die Geschwindigkeiten, für unterschiedliche  $R_2$  bei Variation von  $Re$  untersucht werden. Die Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph}$  sind dabei unmittelbar aus dem Verhältnis von Frequenz  $\omega$  und Wellenzahl  $k$  an der kritischen Stelle zugänglich.

$$w_{ph} = \left. \frac{\omega}{k} \right|_c$$

Um jedoch die jeweilige Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  zu erhalten müssen die partiellen Ableitungen der Frequenzen  $\omega$  (die noch eine Abhängigkeit von  $k$ ,  $R_{1,marg}$  und  $Re$  besitzen) nach der zugehörigen Wellenzahl  $k$  bestimmt und diese am zugehörigen kritischen Wert  $k_c$  ausgewertet (vgl. Abschnitt 3.1.2) werden.

$$w_g = \left. \frac{\partial \omega(k, R_{1,marg}(k), Re)}{\partial k} \right|_c$$

In Abbildung 2.15 sind Gruppen-  $w_g(Re)$  und Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph}(Re)$  in Abhängigkeit von  $Re$  dargestellt. Beide Geschwindigkeiten zeigen in dem betrachteten Durchflussbereich  $0 \leq Re \leq 20$  ( $\forall R_2$ ) ein linear, monotones Anwachsverhalten. Im Fall der L1-SPI (Abb. 2.15a) gilt für den gesamten Durchflussbereich  $w_{ph}(Re) > w_g(Re)$ . Ein wichtiger Unterschied dazu liegt bei verschwindendem Durchfluss vor, da hier die Gruppengeschwindigkeit  $w_g(Re = 0) \approx 0$  beträgt, wohingegen  $w_{ph}(Re = 0) \neq 0$  gilt, was auf die zuvor bereits angesprochene, nicht verschwindende Frequenz bei  $Re = 0$  für  $M \neq 0$  Strukturen zurückzuführen ist (vgl. Abb. 2.15a). Mit sinkendem  $R_2 < 0$  nimmt die Steigung der einzelnen Geraden ab (Einzige Ausnahme stellt  $w_{ph}(R_2 = -100)$  dar). In Abb. 2.15a ist erkennbar, dass im Gegensatz zu den Phasen- nicht alle Gruppengeschwindigkeiten positiv sind (vgl.  $R_2 = -150$ ). Dies ist ein Indiz dafür, dass eine kleine Störung zunächst in negative und erst später in positive Durchflussrichtung propagiert, was im Zusammenhang mit konvektiver-

und absoluter Instabilität in dem späteren Kapitel 4 noch genauer diskutiert werden soll. Im Nulldurchgang der Gruppengeschwindigkeit  $w_g(Re) = 0$  bei endlichem positivem Durchfluss  $Re > 0$  liegt eine Instabilität vor, deren Schwerpunkt im Ursprung verharrt. Ähnliches gilt auch für die Gruppengeschwindigkeiten der R-SPI wie Abb. 2.15b entnommen werden kann. Auffallend ist weiterhin, dass die Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph}(R_2 = 50)$  bei positiven  $R_2$  im gesamten Durchflussbereich deutlich oberhalb der für negative  $R_2$  liegen. Die übrigen Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph}$  ändern jedoch abhängig von  $R_2$  ihre Reihenfolge bei Zunahme von  $Re$ . Stärkere Gegenrotationen bedingen eine geringere Steigung der Geraden im Bezug auf die Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph}$ . Entgegen der Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph}$  ist im Fall der Gruppengeschwindigkeiten  $w_g$  die zugehörige Gerade für positive  $R_2$   $w_g(R_2 = 50)$  nicht von den übrigen abgesetzt. Aber auch bei diesen ist, ähnlich wie zuvor bei  $w_{ph}$ , eine Änderung in der Abfolge der  $w_g$  abhängig von  $R_2$  zu erkennen. So ist z.B.  $w_g(R_2 = -150)$  bei  $Re = 0$  die Größte der betrachteten  $w_g$ , ab  $Re \simeq 15$  aber sogar die Kleinste. In Abb. 2.16 sind die Absolutbeträge  $|w_{ph}(Re)|$  und  $|w_g(Re)|$  im interes-

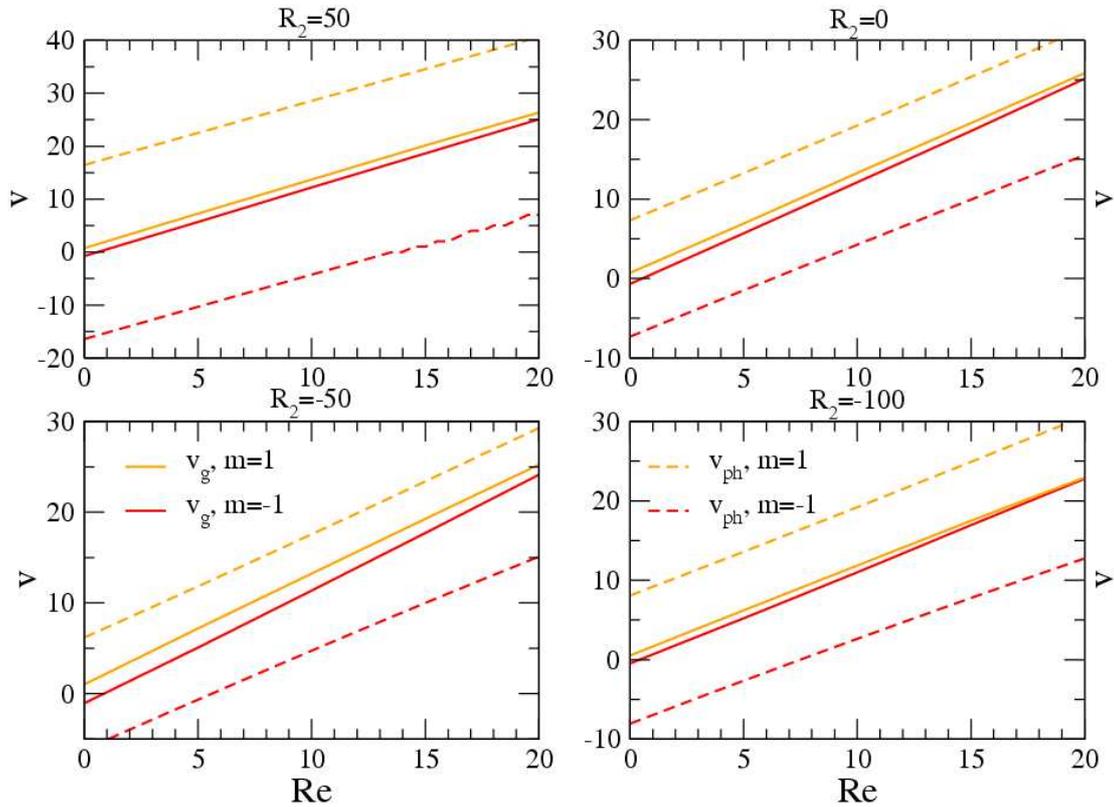


Abbildung 2.17: Gruppen-  $w_g(Re)$  und Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph}(Re)$  der 1-SPI bei Variation von  $Re$  für unterschiedliche  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$

santeren Fall der R1-SPI, da hier der positiv auferlegte Durchfluss, der ohne Durchfluss

vorhandenen bevorzugten Propagationsrichtung entgegenwirkt, (vgl. Abb. 2.15b) zu sehen. In Abb. 2.15a (L1-SPI) sind die Geschwindigkeiten im untersuchten Durchflussbereich  $0 < Re < 20$  positiv, wohingegen die  $w_{ph}$  in Abb. 2.15b (R1-SPI) erst, in Abhängigkeit von der betrachteten  $R_2 < 0$ , für hinreichend große  $Re$  ebenfalls in positiver Durchflussrichtung propagieren. So ist z.B. bei  $R_2 = 50$  ist die Phasengeschwindigkeit  $w_{ph}$  betragsmäßig bis zu  $Re \approx 6.5$  die größere der beiden Geschwindigkeiten. Erst darüber gewinnt die Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  die 'Oberhand'. Der Grafik kann weiterhin entnommen werden, dass sich gleiches Verhalten auch bei anderen  $R_2$  zeigt. Nach Abb. 2.16 verschiebt sich der Schnittpunkt der Absolutbeträge von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei steigendem  $R_2$  zu kleineren  $Re$  verschiebt. Wie ebenfalls in den beiden Abb. 2.15a, 2.15b gut zu erkennen ist, laufen die Geraden der  $w_g$  mit anwachsendem  $Re > 0$  (untersuchter Bereich:  $-20 \leq Re \leq 20$ ) auseinander, diejenigen der  $w_{ph}$  aber eindeutig aufeinander zu. Ähnliches zeigt sich auch bei separater Betrachtung der Gruppengeschwindigkeiten der 1-SPI, die zusammen mit den entsprechenden Phasengeschwindigkeiten für unterschiedliche  $R_2$  in Abbildung 2.17 zu sehen sind.

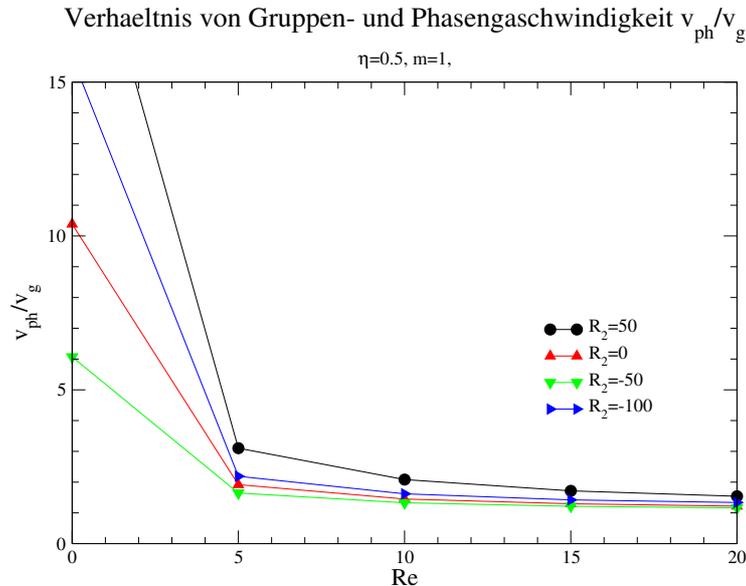


Abbildung 2.18: Verhältnis von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit  $\frac{v_{ph}}{v_g}$  der L1-SPI bei Variation von  $Re$  für unterschiedliche  $R_2$ .  $\eta = 0.5$

Die Geraden der  $w_{ph}$  (gestrichene Linien) verlaufen hierbei annähernd parallel, wobei diejenigen der  $w_g$  (durchgezogene Linien) doch eindeutig aufeinanderzulaufen. Ein weiteres Merkmal ist auch hierbei die unterschiedliche Steigung der Geraden bzgl.  $w_{ph}$  und  $w_g$ . Dies ist besonders im Fall  $R_2 = -50$  gut zu sehen. Als letztes wurde in Abbildung 2.18 einmal explizit das Verhältnis  $\frac{v_{ph}}{v_g}$  der L1-SPI gegen  $Re$  (exemplarisch für einige Werte) dargestellt. Es ist mit zunehmendem Durchfluss ein eindeutiges asymptotisches Verhalten zu

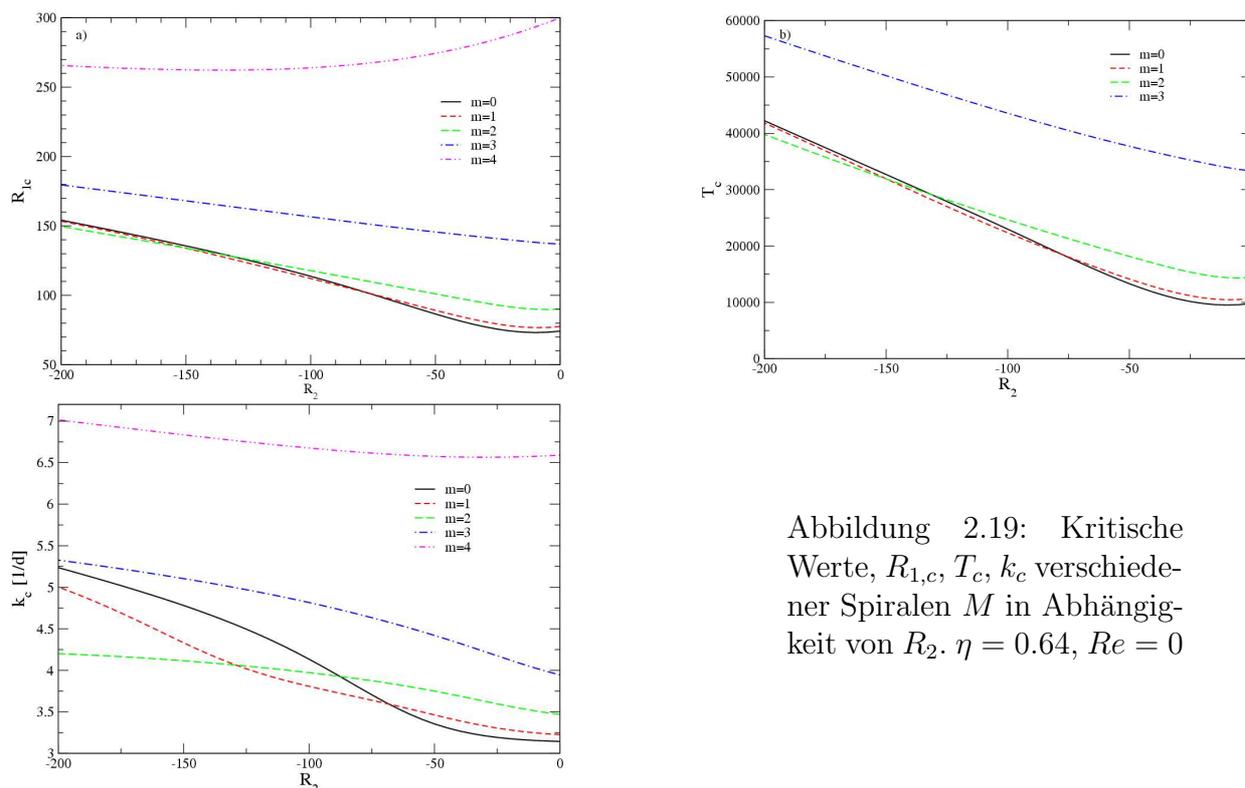


Abbildung 2.19: Kritische Werte,  $R_{1,c}$ ,  $T_c$ ,  $k_c$  verschiedener Spiralen  $M$  in Abhängigkeit von  $R_2$ .  $\eta = 0.64$ ,  $Re = 0$

erkennen, was bedeutet, dass sich zwischen  $w_{ph}(Re)$  und  $w_g(Re)$  ein konstanter Wert einstellt. Im Fall kleiner  $Re$  lassen die Kurven eine deutliche Variation im Verhältnis erkennen.

### Bei gegenrotierendem Außenzylinder

Um die Abhängigkeit der kritischen Werte bzgl. Gegenrotation  $R_2 < 0$  des äußeren Zylinders zu untersuchen wurden  $R_{1,c}$  bzw.  $T_c$  und festem  $\eta = 0.64$  für die einzelnen Lösungen  $M = 0.4$  bei variierendem  $R_2$  berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 2.19 zu sehen. In Abb. 2.19a ist deutlich zu erkennen, dass für  $R_2 < -145$  zuerst die L2-SPI (grün) und erst danach die L1-SPI (rot) instabil wird. Für  $-145 < R_2 < -75$  wird hingegen die L1-SPI als erste wachstumsfähig und schließlich für  $R_2 > -75$  als erstes die TVF (schwarz). Bei betragsmäßig noch größeren  $R_2$  können ebenfalls die höheren Lösungen  $M \geq 4$  als erste wachstumsfähig werden.

### $\eta$ Abhängigkeit

Wie schon im Fall der marginalen Kurven geschehen, soll an dieser Stelle noch kurz auf den Einfluß des Radienverhältnis  $\eta$  auf die kritischen Werte eingegangen werden. Hierzu wurden  $\eta$ -Werte zwischen 0.1 und 0.99 betrachtet und für diese die jeweiligen kritischen Reynoldszahlen  $R_{1,c}$ , bzw. die kritische Taylorzahl  $T_c$ , wie auch die übrigen kritischen Werte  $k_c$ ,  $\omega_c$  bei unterschiedlichen Durchflüssen ermittelt. In Abbildung 2.20a ist eine

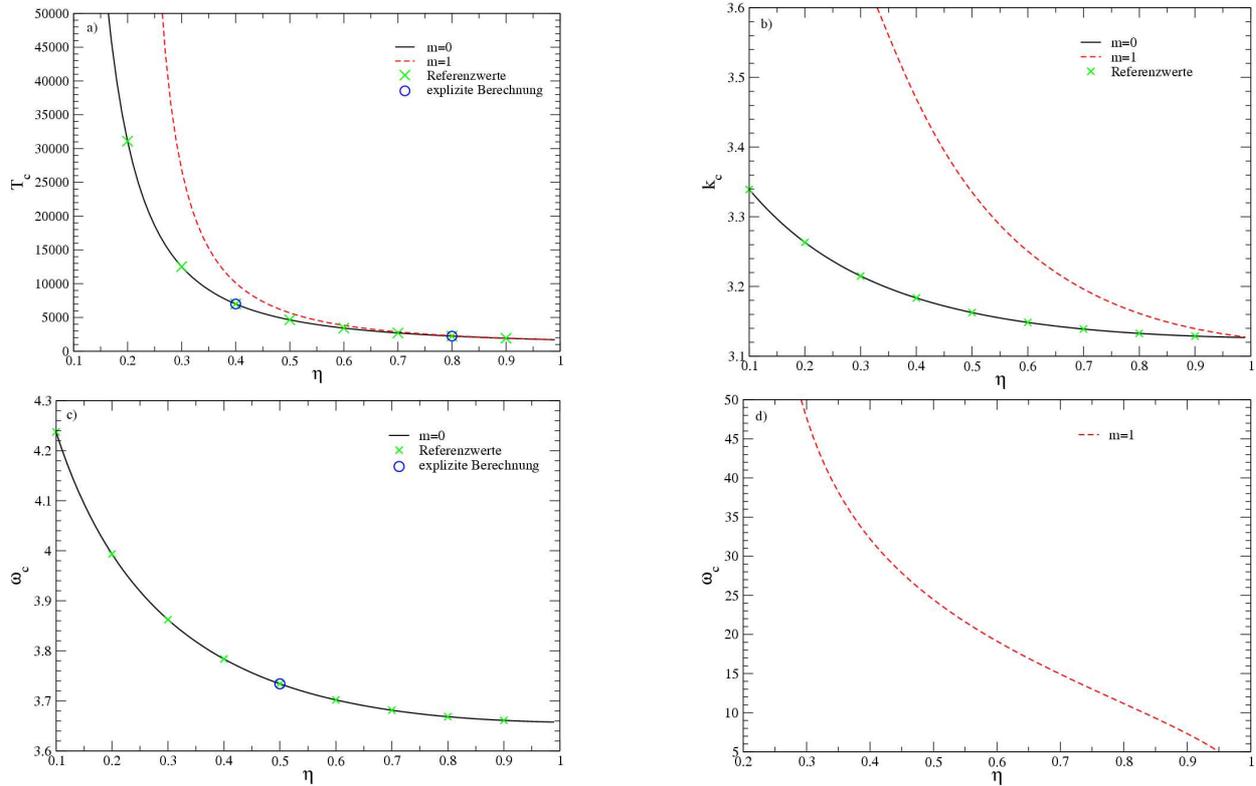


Abbildung 2.20: Kritische Werte,  $T_c$ ,  $k_c$ ,  $\omega_c$  für TVF und 1-SPI in Abhängigkeit von  $\eta$ . Kontrollparameter:  $R_2 = 0$ ,  $Re = 1$ , (inklusive eingetragener Referenzdaten)

deutliche Abnahme der kritischen Taylorzahl  $T_c$  mit zunehmendem  $\eta$  zu erkennen. Für niedrige  $\eta$ -Werte (0.1..0.3) ist diese Abnahme sehr stark, wobei sich für große  $\eta \rightarrow 1$  ein asymptotisches Verhalten zeigt.

Ähnlich der kritischen Reynoldszahl  $R_{1c}$  nimmt auch die kritische Wellenzahl  $k_c$  (siehe Abb. 2.20b) mit Zunahme von  $\eta$  ab. Auch hierbei ist ein asymptotisches Verhalten für  $\eta \rightarrow 1$  zu erkennen. Als letzter der kritischen Werte bleibt noch die kritische Frequenz  $\omega_c$  zu untersuchen. Wie schon die beiden diskutierten Größen weist auch diese eine fallende Monotonie auf (Abb. 2.20c,d), die sich für große  $\eta$  ebenfalls asymptotisch verhält. Hierbei ist jedoch beim TVF darauf zu achten, dass ohne Durchfluss, d.h bei  $Re = 0$ , eine stationäre Instabilität vorliegt und somit die Frequenz bei allen Radienverhältnissen  $\eta$  verschwindet. Zur Überprüfung der ermittelten Kurven wurden diese mit Referenzwerten für TVF aus der Diplomarbeit von Arthur Rektenwald, [28] sowie anderen Literaturwerten verglichen. Diese Referenzwerte wurden in der Abbildung 2.20 zusätzlich durch Kreuze mit aufgenommen. Zudem wurde bei einigen willkürlich ausgewählten Werten (siehe Kreise in Abb. 2.20) eine genauere Untersuchung bezüglich der Abweichung der numerisch

ermittelten Werte mit Referenzwerten durchgeführt.

Die expizite Berechnung der willkürlich ausgewählten Punkte (vgl. Abb. 2.20a) bei Berechnung der Taylorzahl ergab bei  $\eta = 0.1$  eine auf zwei Nachkommastellen genaue Übereinstimmung mit den Referenzwerten. Für größere  $\eta = 0.4$  und  $\eta = 0.8$  verbesserte sich diese auf 3 bzw. 5 Nachkommastellen, was sich mit der vorhandenen Asymptotik der Kurven bei  $\eta \rightarrow 1$  erklären läßt. Auch ein Abgleich der Werte bzgl. der Frequenzen  $\omega$ , wie auch der Wellenzahlen ergab eine bis auf 4 Nachkommastellen genau Übereinstimmung mit den entsprechenden Referenzwerten. Zudem wurde auch noch ein Vergleich mit weiteren Literaturwerten ref. [32] herangezogen, wobei die Genauigkeit dieser Werte ebenfalls gut reproduziert werden konnte. Es sei nochmals erwähnt, dass bei Literaturvergleichen auf die jeweilige Definition der Taylorzahl, aufgrund unterschiedlicher verwendeter Entdimensionalisierungen, zu achten ist. Eine oft in der Literatur [20] verwendete Definition lautet:

$$T_{Lit} = \frac{(1 - \eta)(1 + \eta)}{2\eta^2} R_1^2$$

Somit ergibt sich folgende Umrechnungsformel zu der in dieser Arbeit verwendeten Taylorzahl  $T$

$$T_{Lit} = \frac{2\eta}{1 + \eta} T$$

Nach diesem Vergleich wurden die entsprechenden Werte nun auch für die L1-SPI ermittelt, die zur besseren Übersichtlichkeit aber bereits in die Abbildung 2.20 mit aufgenommen wurden. Es ist in allen Fällen zu erkennen, dass die entsprechenden Kurven der L1-SPI, insbesondere für kleine  $\eta$ , deutlich oberhalb derer der  $M = 0$  Lösung zu liegen kommen. Betrachtet man zum Beispiel die Variation der kritischen Wellenzahl  $k_c$ , so liegt diese im Bereich der betrachteten  $\eta = 0.1..0.99$  im Fall der  $M = 0$  etwa 4.5 Prozent, was einer absoluten Änderung der kritischen Werte von  $\Delta k_c = 0.20931$  entspricht. Wie in Abb. 2.20b zu sehen wird die Variation dieser Größenordnung im Fall der  $M = 1$  SPI bereits bei  $\eta$  Werten zwischen 0.5 und 0.99 erreicht, so dass sich die Gesamtvariation deutlich von denen der niedrigeren  $M = 0$  Lösung absetzt.

Die kritischen Frequenzen weisen im Vergleich zu den kritischen Wellenzahlen eine stärkere Abhängigkeit vom Radienverhältnis auf. Bereits bei  $M = 0$  (Abb. 2.20d) ist eine Variation von knapp 15 Prozent erkennbar. Diese wird jedoch im Falle der L1-SPI um einige Größenordnungen übertroffen, wie in Abb. 2.20d dargestellt. Hierbei ist die geänderte Skala bzgl.  $\omega$  zu beachten.

Im Wesentlichen lassen sich die folgenden Merkmale der  $\eta$  Abhängigkeit festhalten:

Sowohl im Fall des TVF, wie auch für die 1-SPI ist eine Anwachsen der betrachteten kritischen Werte bei Abnahme des Radienverhältnisses  $\eta$  feststellbar. Umgekehrt tritt bei  $\eta \rightarrow 1$  asymptotisches Verhalten auf. Der wichtigste Unterschied bzgl. TVF und 1-SPI besteht in der Variation der kritischen Werte in dem betrachteten  $\eta$  Bereich, die sich, wie zuvor angesprochen, um einige Größenordnungen unterscheiden.

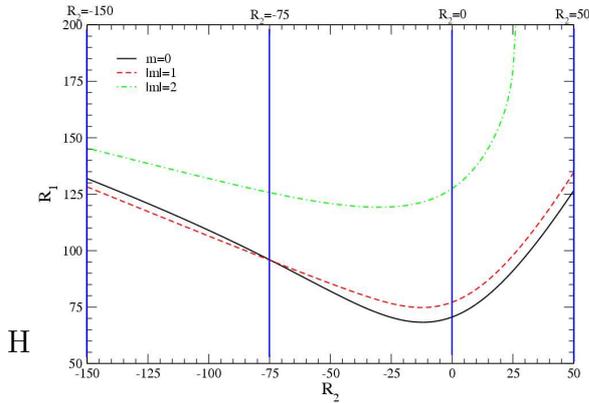


Abbildung 2.21: Kritische Bifurkationsschwellen  $R_{1c}(R_2)$  der  $M = 0, \pm 1, \pm 2$  Strukturen als Funktion von  $R_2$  und  $Re = 0$ ;  $\eta = 0.5$

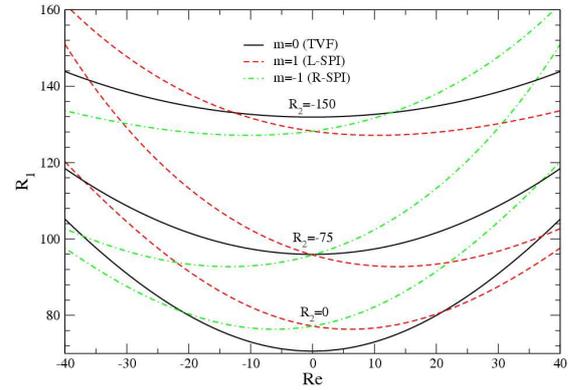


Abbildung 2.22: Bifurkationsschwellen  $R_1(Re)$  von TVF und 1-SPI bei Variation von  $Re$  für ausgewählte  $R_2$  (vgl. Abb. 2.21),  $k = k_c(M, R_2, Re)$ ,  $\eta = 0.5$ .

### 2.3.4 Bifurkationsschwellen

Im Hinblick auf das folgende Kapitel ist es wichtig eine Vorstellung der Bifurkationseigenschaften im Taylor-Couette-System zu gewinnen. Gerade bei diesen vollzieht sich ein Stabilitätswechsel aus dem Bereich absoluter Stabilität über einem sogenannten konvektiverbis hin zur absoluten Instabilität. Auf diesen Sachverhalt wird in Kap. 4.1 genauer eingegangen.

Im Folgenden sollen die Abhängigkeiten der kritischen Reynoldszahlen  $R_{1,c}$  und die daraus resultierenden reduzierten kritischen Bifurkationsschwellen  $\epsilon_c$  bei unterschiedlichen axialen Durchflüssen  $Re$  untersucht werden. Zur Kontrolle der eigenen Messwerte werden hierzu zunächst die bereits in der Literatur [32] bekannten Ergebnisse bzgl. Taylorwirbel TVF, sowie 1-SPI reproduziert und deren Genauigkeit überprüft. Dies ist wichtig, um die vom Code gelieferten Daten zu verifizieren, da später (4.4) die entsprechenden Fit-Parameter der  $M = \pm 2$  Strukturen ermittelt werden.

Abbildung 2.21 zeigt die kritischen Bifurkationsschwellen  $R_{1c}(R_2)$  der  $M = 0, \pm 1, \pm 2$  SPI ohne Durchfluss  $Re = 0$  für unterschiedliche Gegenrotationszahlen  $R_2$ . Vertikale Linien in Abb. 2.21 markieren Gegenrotationszahlen  $R_2 = -150$ ,  $R_2 = -75$  und  $R_2 = 0$  für die in Abb. 2.22 exemplarisch der Einfluss des Durchflusses  $Re$  auf die jeweilige Schwelle  $R_1(Re)$  dargestellt ist. Die schon im Abschnitt 2.3.2 erklärte Symmetrie der L- und R-SPI auf Inversion des Durchflusses  $Re \rightarrow -Re$  ist in Abb. 2.22 deutlich zu erkennen, so dass von nun an nur noch positive Durchflüsse  $Re > 0$  in Betracht gezogen werden.

Die numerischen Resultate der linearen Stabilitätsanalyse des Grundzustandes gegenüber

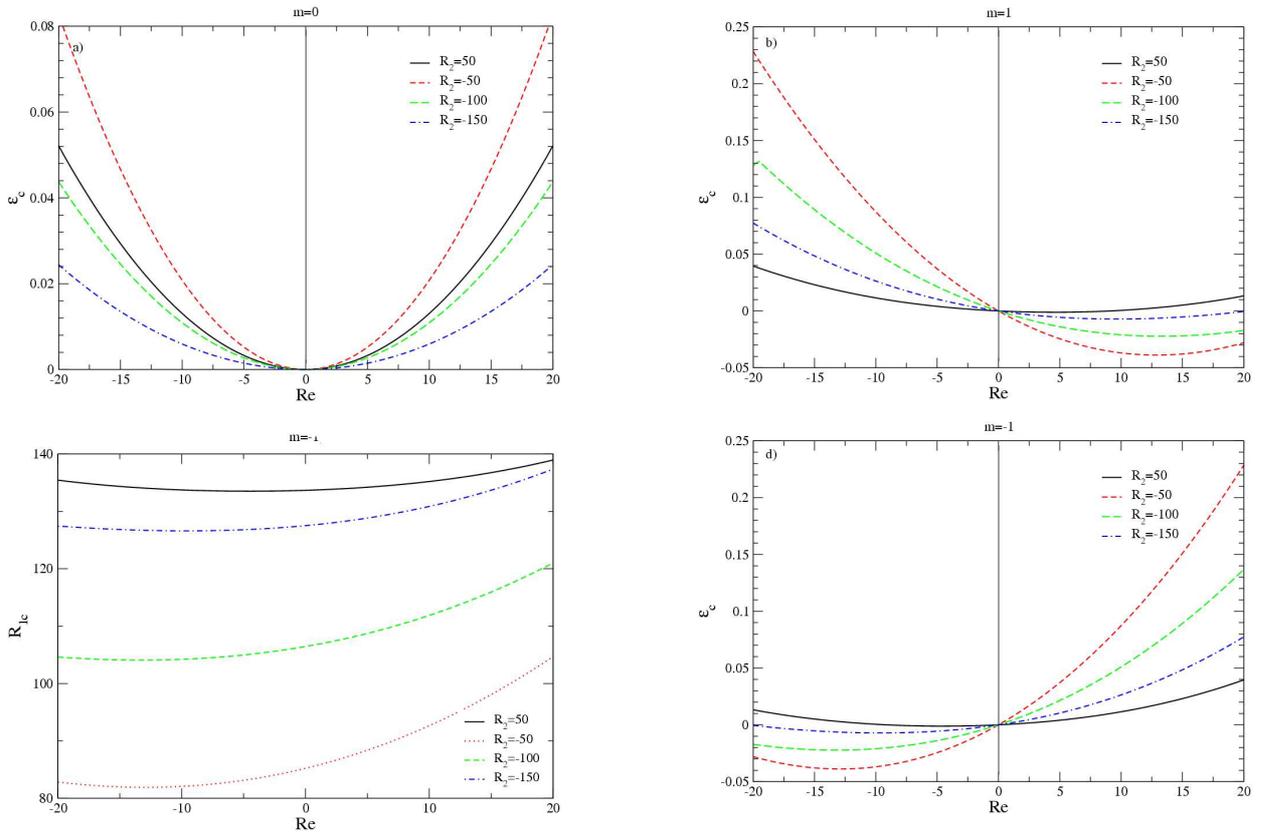


Abbildung 2.23: Reduzierte Bifurkationsschellen  $\epsilon_c(Re)$  von TVF und 1-SPI (a,b,d), bzw. kritische Werte  $R_{1,c}(Re)$  (c) unterschiedlicher  $R_2$ .  $\eta = 0.5$

$M = 0, \pm 1$  Strukturen sind in Abbildung 2.23 aufgetragen. Exemplarisch ist hierbei in Abb. 2.23c für die R1-SPI  $M = -1$  die kritischen Reynoldszahlen  $R_{1,c}(Re)$  in Abhängigkeit des Durchflusses  $Re$  dargestellt. In den übrigen Fällen sind jeweils nur noch die reduzierten kritischen Bifurkationsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  zu sehen, die mittels

$$\epsilon_c = \frac{R_{1,c}(Re)}{R_{1,c}(Re = 0)} - 1 \quad (2.34)$$

zu erhalten sind. Abb. 2.23 b,d der zugehörigen 1-SPI gibt die zuvor angesprochene Symmetrie bzgl.  $Re$  sehr gut wieder. Um dies noch einmal zu veranschaulichen sind in Abbildung 2.24 die reduzierten kritischen Bifurkationsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  der einzelnen Strukturen  $M = 0, \pm 1$  für  $Re = -20..20$  und verschiedene  $R_2$  dargestellt. In beiden Graphen ist zu erkennen, dass für negative Durchflusszahlen  $Re < 0$  zuerst die R1-SPI, gefolgt vom TVF und schließlich die L1-SPI wachstumsfähig werden. Im Fall positiver Durchflüsse  $Re > 0$  ist die Bifurkationsabfolge gerade umgekehrt.

Die Zunahme der Gegenrotation  $R_2 < 0$  wirkt stabilisierend auf alle Strukturen, was

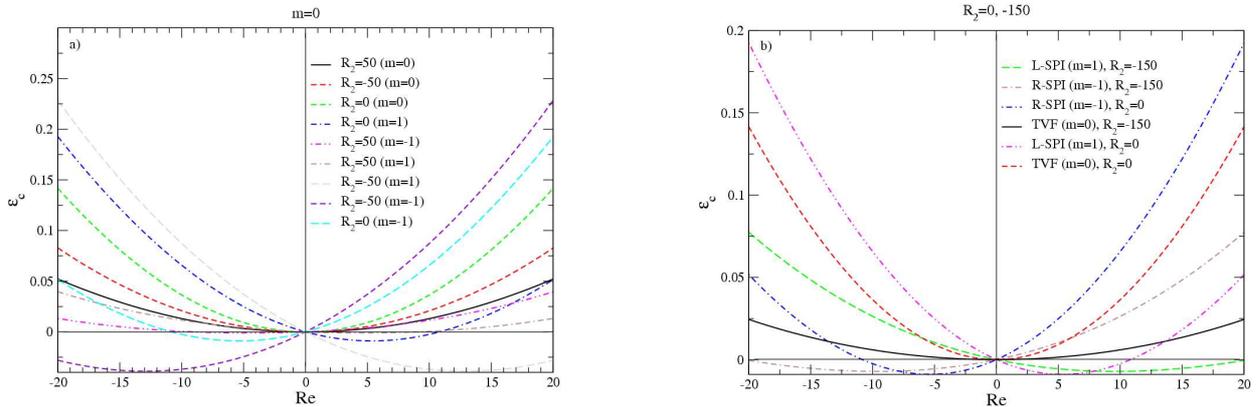


Abbildung 2.24: Reduzierten Bifurkationsschellen  $\epsilon_c(Re)$  unterschiedlicher Strukturen  $M$  für verschiedene  $R_2$  für  $\eta = 0.5$ . links:  $R_2 = 0, -150$ ; rechts:  $R_2 = 0, 50, -50$ ;

sich in den deutlich niedriger liegenden Kurven der Abweichungen  $\epsilon_c(Re)$  mit Gegenrotation bzgl. der gleichen bei  $R_2 = 0$  zeigt. So liegt der Wert von  $\epsilon_c(Re)$  (vgl. Abb. 2.24) bei der R1-SPI für  $R_2 = 0$  und  $Re = 20$  bei etwa  $\epsilon_c(Re = 20, R_2 = 0) \approx 0.196$ , was mehr als das Doppelte des Wertes bei Gegenrotation  $R_2 = -150$  (hier  $\epsilon_c(Re = 20, R_2 = -150) \approx 0.075$ ) aber sonst gleichen Parametern darstellt. Um die Richtigkeit der ermittelten Kurven zu überprüfen wurden diese mittels eines Polynoms 4.-Grades

$$f(Re) = a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4 \quad (2.35)$$

angefittet. Zudem wurde für einige Werte, wie schon im vorherigen Abschnitt, eine exaktere Bestimmung der Genauigkeit vorgenommen. Die Werte der jeweiligen Fitkoeffizienten  $a_i$  wurden der Literatur [32] bei entsprechender festgehaltener Reynoldszahl  $R_2$  entnommen. Im Fall des TVF sind die ungeraden Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  identisch Null, wie sich auch in der Abb. 2.22 zeigt. Hierbei handelt es sich um eine in erster Linie quadratische Funktion mit einer kleinen quartischen Abweichung.

Zum Vergleich der Kurven die mittels der linearen Stabilitätsanalyse gewonnen wurden sowie derer, durch die Fitfunktion ermittelten, sind diese in Abbildungen 2.25 zusammen dargestellt. Darin stellen die Linien bzw. strichpunktierten Linien die aus der Rechnung erhaltenen Bifurkationsschwellen dar. Bei den Kreuzen handelt es sich hingegen um die mittels der Fitfunktion (2.35) berechneten Werte. Dabei wurden diese mit einer Auflösung von  $\Delta Re = 1$  ermittelt und zusammen mit den numerischen Werten zum besseren Vergleich in einem Graphen zusammengefaßt. Um ein besseres Gefühl für die numerischen Resultate zu erhalten wurden einige Werte (vgl. Abb. 2.25a,b) willkürlich ausgewählt und mittels expliziter Rechnung einer genaueren Untersuchung unterzogen. So z.B. ergab die Untersuchung der Abweichung von Rechnungs- und Fitwert etwa bei dem Parametersatz  $m = 0$ ,  $R_2 = 50$ ,  $Re = 15$ , (siehe Abb. 2.25a) eine relative Abweichung von  $1.2287 \cdot 10^{-5}$ . Für einen

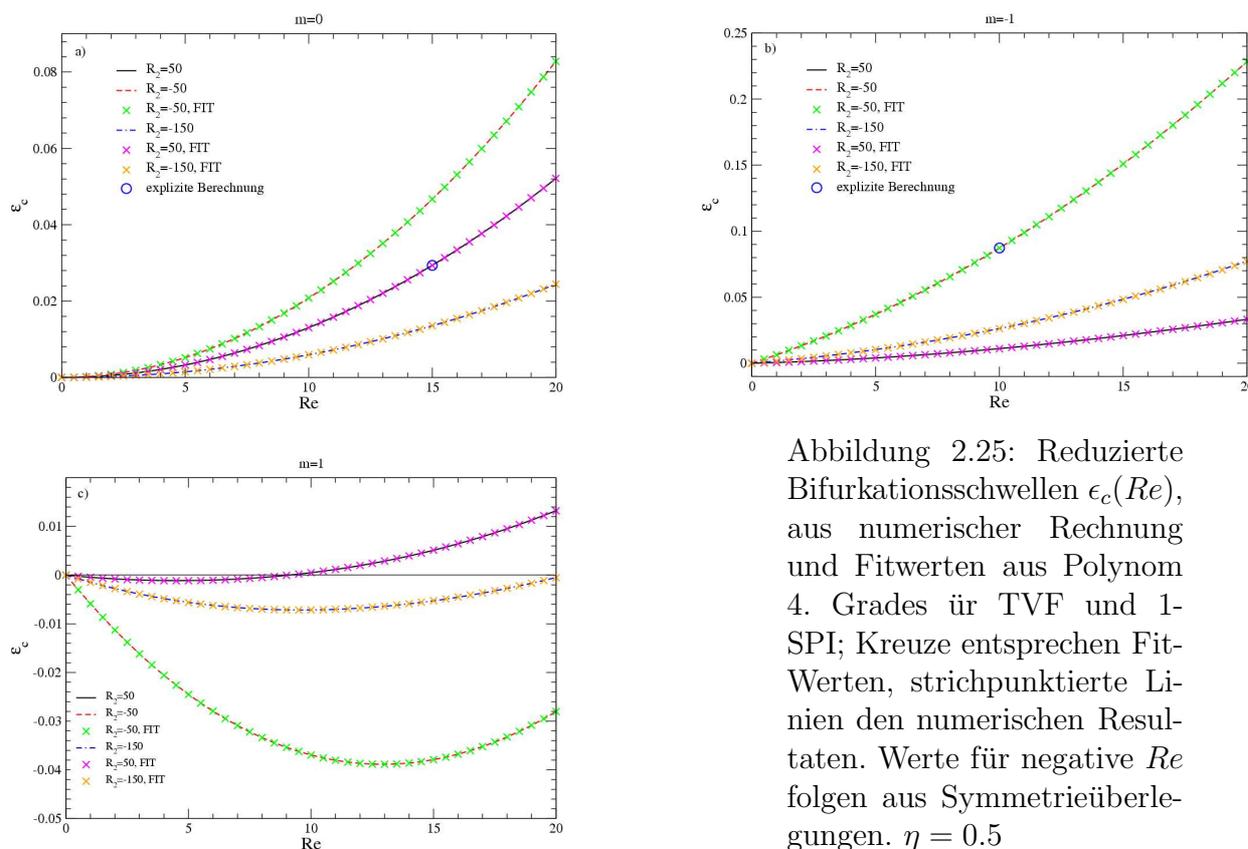


Abbildung 2.25: Reduzierte Bifurkationsschwellen  $\epsilon_c(Re)$ , aus numerischer Rechnung und Fitwerten aus Polynom 4. Grades für TVF und 1-SPI; Kreuze entsprechen Fitwerten, strichpunktierte Linien den numerischen Resultaten. Werte für negative  $Re$  folgen aus Symmetrieüberlegungen.  $\eta = 0.5$

weiterern überprüfter Wert bei  $m = -1$ ,  $R_2 = -50$ ,  $Re = 10$  (siehe Abb. 2.25b) betrug die relative Abweichung der Werte  $1.21969 \cdot 10^{-4}$ . Es wurden noch weitere stichprobenartige Untersuchungen zur Übereinstimmung der Werte durchgeführt, deren Ergebnisse ebenfalls in der beschriebenen Größenordnung lagen.

Die in diesem Kapitel vorgenommenen Untersuchungen bezüglich marginaler Stabilitätskurven und kritischer Werte dienten weitestgehend dem Vergleich und somit auch zur Kontrolle mit den gängigen Literaturwerten.

Der eigentliche Teil dieser Arbeit beginnt in dem nun folgenden Kapitel mit der Untersuchung der Stabilitätseigenschaften von L2SPI und deren Frontpropagationen.

# Kapitel 3

## Analyse der Amplitudengleichungen und marginalen Stabilitätsflächen

### 3.1 Amplitudengleichungen

#### 3.1.1 Grundlagen

Der Ausgangspunkt zur Ableitung einer Amplitudengleichung für das hier betrachtete Problem ist die bereits in Kapitel 2 durchgeführte lineare Stabilitätsanalyse des Grundzustandes. Wird bei konstantem Durchfluss  $Re$  die Reynoldszahl  $R_1$  über ihren kritischen Wert  $R_{1c}$  erhöht, wird der Grundzustand instabil und es bifurkiert eine neue Lösung aus dem Grundzustand heraus. In diesem *überkritischen* Zustand wird ein ganzes Wellenzahlband der Breite  $\delta k \propto \sqrt{\mu} = \sqrt{\frac{R_1}{R_{1c}(Re)} - 1}$  angeregt (vgl. Abb. 3.1). Dadurch kommt es zur Ausbildung von Wellenpaketen, wie in Abb. 4.2 exemplarisch zu sehen.

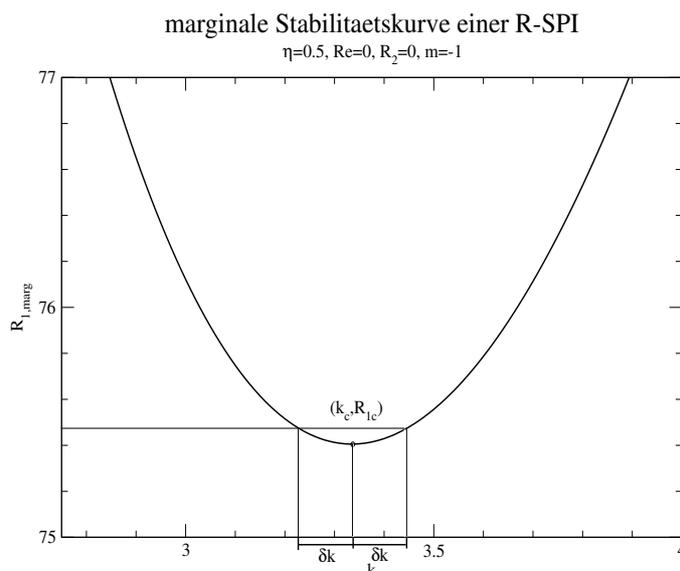


Abbildung 3.1: Marginale Stabilitätskurve  $R_{1,marg}(k)$  am Beispiel einer R1-SPI in der Nähe des kritischen Punktes  $(k_c, R_{1c})$ . Gut zu erkennen ist der parabolische Kurvenverlauf in der Nähe des Minimums.  $\eta = 0.5$ ,  $Re = 0$ ,  $R_2 = 0$

Für weit überkritische Kontrollparameter ist die linearisierte Form der Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung des Systems nicht mehr zulässig. Hier müssen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden. Im Bereich leicht oberhalb des kritischen Punktes, wo die Nichtlinearitäten noch eine untergeordnete Rolle spielen, genügt allerdings eine schwach-nichtlineare Analyse mittels *Amplitudengleichungen*. Es sei an dieser Stelle aber noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich der Gültigkeitsbereich dieser Näherung wirklich nur auf die unmittelbare Umgebung der kritischen Punkte (wie in Abbildung 3.1 dargestellt) beschränkt. Entfernt man sich etwas weiter von diesen, verliert die Näherung sehr schnell ihre Gültigkeit.

Befindet sich das System im unterkritischen Bereich, werden die Geschwindigkeitseigenmoden  $\vec{X}$ , welche die Abweichung vom Grundzustand darstellen, im Laufe der Zeit weggedämpft. Demgegenüber bilden sich am kritischen Punkt, abhängig von der dominanten Mode, entweder TVF oder SPI aus. Oberhalb des kritischen Punktes, im schwach überkritischen Bereich, werden nun verschiedene Moden in einem ganzen Band von Wellenzahlen ( $\delta k \propto \sqrt{\mu}$ ) angeregt. Aufgrund der nun vorhandenen Nichtlinearitäten in den Bewegungsgleichungen ergeben sich hierbei sowohl lokale, als auch temporäre Variationen in den jeweiligen Geschwindigkeitseigenmoden  $\vec{X}$ . Um diese näherungsweise beschreiben zu können, bietet es sich an, eine Amplitude  $A$  an die kritische Geschwindigkeitseigenmode  $\vec{X}_c$  der linearisierten Navier-Stokes-Gleichung anzubringen. Im Bezug auf die räumliche Variation genügt es hierbei eine Abhängigkeit der Amplitude  $A = A(z, t)$  in Strukturbildungsrichtung  $z$  anzunehmen, wobei die Superposition der im gesamten Wellenzahlband angeregten Moden, sowie deren Wechselwirkung mit berücksichtigt werden.

$$\vec{X}(r, \varphi, z, t) = A(z, t) \vec{X}_c(r) e^{i(k_c z + m\varphi - \omega_c t)} \quad (3.1)$$

Die Amplitude  $A(z, t)$  ist somit Lösung der Amplitudengleichung (auch *Ginzburg-Landau-Gleichung* bzw. *Ginzburg-Landau-Näherung* GLN genannt):

$$\tau_0(\partial_t + v_g \partial_z) A(z, t) = [(1 + ic_0)\mu + \xi_0^2(1 + ic_1)\partial_z^2 - \gamma(1 + ic_2)|A(z, t)|^2] A(z, t) \quad (3.2)$$

Auf eine explizite und vollständige Herleitung dieser Amplitudengleichung wird hier verzichtet. Hierzu finden sich in der Literatur genügend Referenzen, wie in zahlreichen Diplomarbeit z.B. [28]. Die grundlegende Idee besteht jedoch darin, die jeweiligen überkritischen Eigenmoden nach Potenzen des Kontrollparameters  $\sqrt{\mu}$  zu entwickeln.

$$\vec{X} = \sqrt{\mu} A(z, t) \vec{X}_0 + \mu \vec{X}_1 + \dots \quad (3.3)$$

Dabei misst  $\mu$  bei fest vorgegebenem Durchfluss  $Re$  die relative Abweichung vom kritischen Wert  $R_{1c}(Re)$ , d.h.

$$\mu := \frac{R_1}{R_{1c}(Re)} - 1 \quad (3.4)$$

Dies bedeutet, dass  $\mu$  im kritischen Punkt gerade verschwindet und im über-/unterkritischen Bereich positiv/negativ ist. Die Entwicklung (3.3) wird nun in die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen (2.4) eingesetzt und sukzessive bis zur Ordnung  $\mu^{\frac{3}{2}}$  gelöst. Dabei ergibt

sich die Amplitudengleichung (3.2) als Resultat der Lösbarkeitsbedingung in entsprechender Ordnung [27, 28]. Dieses Verfahren stellt also insgesamt eine schwach-nichtlineare Analyse dar.

### 3.1.2 Lineare Koeffizienten

Die Koeffizienten vor den linearen Termen der Amplitudengleichung (3.2), im Folgenden einfach als lineare Koeffizienten bezeichnet, beschreiben das Anwachsverhalten der Amplitude  $A(z, t)$ . Diese sind in den Gleichungen (3.5, 3.5) farblich hervorgehoben. Für positives  $\mu$  bilden sich TVF ( $M = 0$ ) aus, deren Amplitude allerdings ohne den Koeffizienten  $\gamma$  in (3.2) exponentiell anwachsen würde. Da es hier jedoch nur um geade dieses Anwachsverhalten geht, ist die Kenntnis der linearen Koeffizienten ausreichend.

$$\tau_0(\partial_t + v_g \partial_z)A(z, t) = [(1 + ic_0)\mu + (1 + ic_1)\xi_0^2 \partial_z^2] A(z, t) \quad (3.5)$$

Eine Möglichkeit das Anwachsverhalten der Amplitude zu beschreiben bietet folgender Lösungsansatz:

$$A(z, t) = e^{i\delta k z + \sigma_A t} \quad (3.6)$$

(mit  $\delta k := k - k_c$  Breite des angeregten Wellenzahlbandes (vgl. Abb. 3.1),  $\sigma_A :=$  Eigenwert der Amplitudengleichung (3.5)) Durch Einsetzen des Ansatzes (3.6) in (3.5) erhält man den Eigenwert

$$\sigma_A = -i\delta k v_g + (1 + ic_0)\frac{\mu}{\tau_0} - (1 + ic_1)\frac{\xi_0^2}{\tau_0}(\delta k)^2. \quad (3.7)$$

Um einen Zusammenhang zwischen dem Eigenwert  $\sigma$  der linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen (2.5) und den linearen Koeffizienten obiger Amplitudengleichung (3.5) herzustellen geht man von der Idee aus, dass sich in hinreichender Nähe des kritischen Punktes die Eigenmoden mittels beider Gleichungen beschreiben lassen;

$$\vec{X}(r)e^{i(kz+m\varphi)+\sigma t}|_c \approx A(z, t)\vec{X}_c(r)e^{i(k_c z+m\varphi-\omega_c t)}|_c \quad (3.8)$$

$$(3.6) \implies \vec{X}_c(r)e^{i(k_c z+m\varphi)+\sigma t} \approx \vec{X}_c(r)e^{i(k_c z+m\varphi-\omega_c t)+\sigma_A t} \quad (3.9)$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt folgenden Zusammenhang der Eigenwerte in der Nähe des kritischen Punktes:

$$\sigma_A = \sigma + i\omega_c, \quad (3.10)$$

woraus schließlich mit (3.7) folgt:

$$\sigma(\mu, \delta k) = -i\delta k v_g + (1 + ic_0)\frac{\mu}{\tau_0} - (1 + ic_1)\frac{\xi_0^2}{\tau_0}(\delta k)^2 - i\omega_c \quad (3.11)$$

bzw. nach Trennung des im Allgemeinen komplexen Eigenwertes  $\sigma$  in Real- und Imaginärteil:

$$\sigma(\mu, \delta k) = \frac{\mu}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0}(\delta k)^2 - i \left[ \delta k v_g - c_0 \frac{\mu}{\tau_0} + c_1 \frac{\xi_0^2}{\tau_0}(\delta k)^2 + \omega_c \right] \quad (3.12)$$

$$= \gamma - i\omega \quad (3.13)$$

Diese Gleichung stellt die *Ginzburg-Landau-Näherung GLN* des Eigenwertes der linearisierten NSE dar. Wie zu erkennen handelt es sich dabei um eine Entwicklung von  $\sigma(R_1, k)$  um die kritischen Werte  $R_{1c}$  und  $k_c$  in linearer Ordnung bzgl.  $\mu$  sowie quadratisch in  $\delta k$ . Als Ergebnis dieser Entwicklung sind nun die linearen Koeffizienten relativ einfach mittels partieller Ableitungen des Eigenwertes  $\sigma$  wie folgt zugänglich:

$$v_g = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_c \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{\tau_0} = R_{1c} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial R_1} \right)_c \quad (3.15)$$

$$c_0 = -\tau_0 R_{1c} \left( \frac{\partial \omega}{\partial R_1} \right)_c \quad (3.16)$$

$$c_1 = \frac{\tau_0}{2\xi_0^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_c \quad (3.17)$$

$$\xi_0^2 = -\frac{\tau_0}{2} \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial k^2} \right)_c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial k^2} \right)_c \quad (3.18)$$

Gemäß (3.14)-(3.18) ergeben sich die linearen Koeffizienten durch einfache numerische Differentiation der komplexen Eigenwerte  $\sigma = \gamma - i\omega$  3.13. Zur Berechnung dieser aus der marginalen Stabilitätskurve wurde ein zentraler Differenzenquotient verwendet. Bei den Koeffizienten, die anhand der ersten Ableitungen gewonnen werden, ist dieses Verfahren eher unproblematisch. Anders jedoch bei  $c_1$  und  $\xi_0^2$ , da hierbei die zweiten Ableitungen bestimmt werden müssen, wobei sich dies bei  $c_1$  am schwierigsten darstellt. Die, für die jeweiligen Koeffizienten gewählten Differenzen lauten schließlich: Bei  $v_g$  gilt  $\delta k = 10^{-3}$ , bei  $\tau_0$  und  $c_0$  gilt  $\delta R_1 = 10^{-1}$ , bei  $c_1$  gilt  $\delta k = 10^{-1}$  und bei  $\xi_0^2$  gilt  $\delta k = 5 * 10^{-2}$

### Koeffizient $v_g$

Durch den Koeffizienten  $v_g$  wird eine Gruppengeschwindigkeit eines durch das System propagierenden Wellenpaketes am kritischen Punkt festgelegt. Im Folgenden wird diese mit  $w_g$  bezeichnet<sup>1</sup>. Für die dominante Mode beim TVF bedingt dies unmittelbar ein identisches Verschwinden, da bei dieser bereits  $\omega_{marg}(m=0, k) \equiv 0$  für alle Wellenzahlen  $k$  gilt. Wie bereits im Abschnitt 2.3.3 kurz diskutiert, nimmt die Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  im Wesentlichen linear mit dem Durchfluss  $Re$  zu, was in den Abb. 2.15-2.17 deutlich erkennbar ist.

Auch wenn es in dieser Arbeit vornehmlich um 2-SPI geht, soll an dieser Stelle kurz auf 1-SPI eingegangen werden: Einerseits lassen sich dabei gerade im Bezug auf die Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  einige wichtige Phänomene, wie das Verhalten von absoluter- und konvektiver Instabilität erläutern und zum Anderen können die hierbei erhaltenen Werte

<sup>1</sup>in Analogie des axialen Geschwindigkeitsfeldes  $w$

mit Referenzen aus der Literatur [32] verglichen werden. Auf die 2-SPI und deren dominante  $m = \pm 2$  Moden wird im einzelnen in Abschnitt 3.1.4 eingegangen.

Im Gegensatz zu den bereits früher diskutierten Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph}$ , die bei den jeweiligen kritischen Werten im Fall der L1-SPI ohne Durchfluss strikt positiv (vgl. Abb. 2.15) sind, treten in der Gruppengeschwindigkeit auch negative Werte im überkritischen Fall auf. So bewegt sich z.B. für  $R_2 = -150$  das Wellenpaket bei einer R1-SPI zunächst in negative  $z$  Richtung, bevor dieses als Ganzes bei positivem Durchfluss an einer Stelle verharrt, um sich für noch größeres  $Re$  schließlich in positiver  $z$  Richtung zu zubewegen. Im Umkehrpunkt der Bewegungsrichtung  $w_g(Re) = 0$  verharrt der Schwerpunkt im Laborsystem und es liegt somit eine Instabilität vor.

### Koeffizient $\tau_0$

Bei dem Koeffizienten  $\tau_0$  handelt es sich um eine Relaxationszeit in dem mit der Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  mitbewegten Bezugssystem. Ausgehend von obigem Ansatz (3.6) erhält man durch Ausnutzen des Eigenwertes (3.7)

$$A(z, t) = e^{i\delta kz + [-i\delta kv_g + (1+ic_0)\frac{\mu}{\tau_0} - (1+ic_1)\frac{\xi_0^2}{\tau_0}(\delta k)^2]t} \quad (3.19)$$

$$\iff A(z, t) = e^{\delta k(z - v_g t) + [(1+ic_0)\frac{\mu}{\tau_0} - (1+ic_1)\frac{\xi_0^2}{\tau_0}(\delta k)^2]t}. \quad (3.20)$$

Im mitbewegten Bezugssystem wird die Ortsabhängigkeit durch den Zusammenhang  $z = v_g t$  (Gaussche Ergänzung) eliminiert, so dass für die nur noch zeitabhängige Amplitude gilt:

$$A_{v_g} := A(z = v_g t, t) = e^{-\frac{t}{\Theta}} \quad (3.21)$$

$$\text{wobei } \frac{1}{\Theta} := \frac{1}{\tau_0} \left\{ - \left[ (1+ic_0)\mu - (1+ic_1)\xi_0^2(\delta k)^2 \right] \right\} \quad (3.22)$$

Somit sieht man, dass  $\tau_0$  proportional zur Relaxationszeit der Amplitude in dem mit  $v_g$  mitbewegten Bezugssystem ist. Für den Fall, dass  $\tau_0 \propto \Theta$  positiv ist, fällt die Anfangsamplitude im mitbewegten System ab, für negative hingegen wächst diese an.

### Koeffizient $c_0$

Durch den Koeffizienten  $c_0$  wird eine Frequenzverschiebung verursacht. Wie aus (3.22) ersichtlich, ist diese Verschiebung proportional zu  $\mu$ .

### Koeffizient $c_1$

Wie schon der Koeffizient  $c_0$  verursacht auch  $c_1$  eine Frequenzverschiebung (vgl. (3.22))

der Amplitude, in diesem Fall jedoch mit quadratischer Abhängigkeit  $(\xi_0 \delta k)^2$ . Hervorgehoben wird diese Verschiebung aufgrund des von Außen auferlegten Durchfluss'. Für den einfachen Fall des TVF bedingt dies, dass der Koeffizient  $c_1$  ohne Durchfluss  $Re = 0$  verschwindet. Für  $M \neq 0$  Strukturen gilt aber ebenso  $c_1(Re = 0) \neq 0$ .

### Koeffizient $\xi_0^2$

Mit dem Koeffizienten  $\xi_0^2$  wird die mögliche Bandbreite der angeregten Moden beschrieben. Auf der marginalen Stabilitätskurve gilt:

$$\gamma(R_1, k)|_{\text{marg}} = 0 \text{ und demzufolge auch } \frac{d^2\gamma}{dk^2} = 0.$$

Weiter gilt am kritischen Punkt:  $\frac{\partial R_1}{\partial k}|_c = 0$ . Somit reduziert sich  $\frac{d^2}{dk^2}\gamma(R_{1,\text{marg}}(k), k) = (\frac{\partial}{\partial k} + \frac{\partial R_1}{\partial k} \frac{\partial}{\partial R_1})^2$  am kritischen Punkt zu:  $\frac{\partial^2\gamma}{\partial k^2} = -\frac{\partial\gamma}{\partial R_1}|_c \frac{\partial^2 R_1}{\partial k^2}|_c$ . Unter Ausnutzung von (3.15) folgt unmittelbar die in (3.18) gezeigte Umformung.

Er beschreibt letztendlich die Krümmung der marginalen Stabilitätskurve in ihrem Minimum (Abb. 3.1). Dies hat zur Folge, dass ein kleiner Wert von  $\xi_0^2$ , der einer flachen neutralen Kurve entspricht, eine große Anzahl der möglichen instabilen Wellenvektoren bedingt. Somit ist  $\xi_0^2$  entscheidend für die Breite des angeregten Wellenzahlbandes beim Überschreiten des kritischen Punktes.

### 3.1.3 Symmetrien der Koeffizienten

Wie bereits gesehen können die linearen Koeffizienten aus den Eigenwerten  $\sigma = \gamma - i\omega$  (3.13) berechnet werden. Von besonderem Interesse sind dabei die Symmetrien bzgl. Strukturwellenzahl  $M$  und Durchfluss  $Re$ , deren Zusammenhang bei Real- und Imaginärteil wie folgt gegeben ist.

$$Re[\sigma] = \gamma(M, Re) = -\gamma(-M, -Re) \quad (3.23)$$

$$Im[\sigma] = \omega(M, Re) = -\omega(M, Re), \quad (3.24)$$

d.h.  $\gamma/\omega$  besitzt gerade/ungerade Symmetrie in  $Re$ . Die unmittelbar hieraus resultierenden Symmetrien sind der Tabelle 3.1 zu entnehmen.

Wie schon bei den kritischen Werten 2.3.2 gesehen, genügt es, sich auf positive Durchflüsse zu beschränken und diejenigen Werte für negative  $Re$  aus den Symmetrien (Tab. 1.1) abzuleiten.

Hierzu sind in den Abb. 3.2 und 3.3 die Gruppengeschwindigkeiten  $w_g$  der dominanten Moden einer 1-SPI für positiven Durchfluss  $Re = 0..20$  einander gegenübergestellt. Entsprechend der Symmetrien 3.1 ergeben sich etwa die  $w_g$  der L1-SPI aus denen der R1-SPI anschaulich durch Spiegelung von Abb. 3.3 an Abszisse und Ordinate und anschließender Negierung der Werte.

$$\begin{aligned}
v_g(-M, -Re) &= -v_g(M, Re) && \text{ungerade} \\
\tau_0(-M, -Re) &= \tau_0(M, Re) && \text{gerade} \\
c_0(-M, -Re) &= -c_0(M, Re) && \text{ungerade} \\
c_1(-M, -Re) &= -c_1(M, Re) && \text{ungerade} \\
\xi_0^2(-M, -Re) &= -\xi_0^2(M, Re) && \text{gerade}
\end{aligned}$$

Tabelle 3.1: Symmetriezusammenhang der linearen Koeffizienten der Amplitudengleichung. Die hierbei eingeführte Unterteilung der linearen Koeffizienten in ungerade und gerade, dient nur dazu, um diejenigen mit gleichen Symmetrien später einfacher beschreiben zu können.

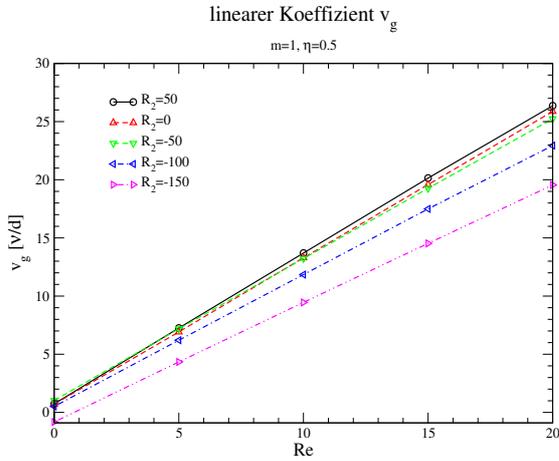


Abbildung 3.2: Linearer Koeffizient  $v_g(Re)$  der L1-SPI bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$ .

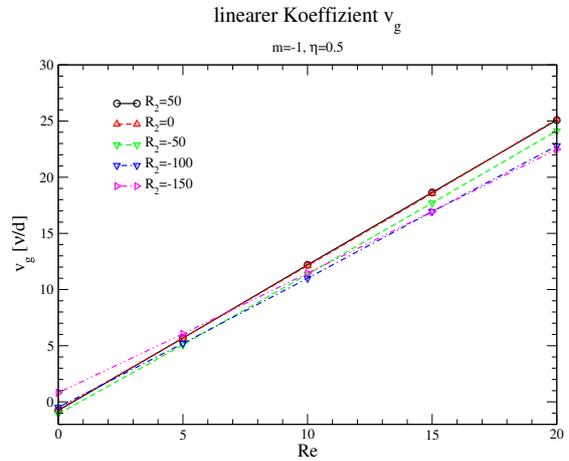


Abbildung 3.3: Linearer Koeffizient  $v_g(Re)$  der R1-SPI bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$ .

### 3.1.4 Lineare Koeffizienten der 2-SPI für $\eta = 0.7$ und $\eta = 0.5$

In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse zur Berechnung der linearen Koeffizienten aus der linearen Amplitudengleichung (3.5) im Bezug auf die 2-SPI zusammengefasst. Hierzu wurde die Berechnung bzgl.  $m = 2$ ,  $\eta = 0.7$  und  $\eta = 0.5$  im Durchflussbereich  $-20 < Re < 20$  mit einer Schrittweite  $\Delta Re = 1$  durchgeführt. Wie bereits erwähnt, befaßt sich diese Arbeit vornehmlich mit  $M = \pm 2$  Strukturen, bei einem Radienverhältnis von  $\eta = 0.5$ . Der Vollständigkeit und zum besseren Vergleich sind aber auch die für  $\eta = 0.7$  ermittelten linearen Koeffizienten in den Abb. 3.4- 3.9 für positive Durchfluss mit angegeben. Diese

dienen auch gleichzeitig als Referenzen bzgl. der 1-SPI (vgl. [32]), da es bei diesen, wie sich zeigte, einen sehr viel größeren Wiedererkennungswert gibt, als im Fall der 2-SPI bei einem Radienverhältnis  $\eta = 0.5$ . Die in Abhängigkeit des Durchflusses  $Re$  erhaltenen Kurven wurden nun mit einer Funktion 4. Grades

$$f(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4 \quad (3.25)$$

angefittet. Die zugehörigen Fitparameter bzgl.  $\eta = 0.7$  sind aus der Tab. 3.3 für  $M = 2$  ablesbar. Die Umrechnungsvorschrift der in der Tabelle aufgeführten Parameter  $a_i$  von  $M = 2$  zu denjenigen der  $M = -2$  Struktur lauten:

M	→	-M
<i>gerade:</i>	$a_0 \rightarrow a_0$	<i>ungerade:</i> $a_0 \rightarrow -a_0$
	$a_1 \rightarrow -a_1$	$a_1 \rightarrow a_1$
	$a_2 \rightarrow a_2$	$a_2 \rightarrow -a_2$
	$a_3 \rightarrow -a_3$	$a_3 \rightarrow a_3$
	$a_4 \rightarrow a_4$	$a_4 \rightarrow -a_4$

Tabelle 3.2: Symmetrien der einzelnen Fitparameter  $a_i$  der linearen Koeffizienten. Die Bezeichnungen *gerade* und *ungerade* sind auf das Verhalten der Koeffizienten bei Übergang  $M \rightarrow -M$  aus Tabelle 3.1 bezogen. So gelten etwa für  $v_g$  die unter 'ungerade' aufgeführten Umformungsvorschriften.

$v_g(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$					
$R_2$	50	0	-50	-100	-150
$a_0$	0.3947	0.6312	1.2416	1.6890	2.0054
$a_1$	1.2649	1.26138	1.2656	1.1882	1.1539
$a_2 * 10^3$	1.3050	2.3402	-2.8225	1.3763	-1.0487
$a_3 * 10^5$	-9.6031	-19.7956	9.5396	-19.397	-6.4476
$a_4 * 10^6$	2.1392	4.622	-1.6864	4.6581	2.9612

$\tau_0(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$					
$R_2$	50	0	-50	-100	-150
$a_0 * 10^2$	2.2978	3.6583	2.6275	1.9099	1.5222
$a_1 * 10^5$	-9.9948	42.3321	10.2809	-2.5775	-7.6342
$a_2 * 10^6$	0.5421	-10.0562	-16.9941	-8.0532	0.3165
$a_3 * 10^7$	-4.6741	51.2946	3.7260	4.6783	-0.0490
$a_4 * 10^8$	1.2216	-10.2051	-0.4394	-1.1367	-0.1433

$c_0(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$					
$R_2$	50	0	-50	-100	-150
$a_0$	-1.0021	-1.2893	-1.0417	-0.7873	-0.6245
$a_1 * 10^3$	9.0177	3.9354	4.9007	7.0562	8.0911
$a_2 * 10^4$	-2.0619	25.8948	4.1496	2.0765	-1.7877
$a_3 * 10^5$	1.8159	-15.1817	-1.7769	2.4803	0.1332
$a_4 * 10^7$	4.5581	31.5715	2.7352	6.3552	0.1721

$c_1(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$					
$R_2$	50	0	-50	-100	-150
$a_0 * 10^1$	0.0969	2.7377	0.0807	-3.8610	-7.8474
$a_1 * 10^3$	8.3259	41.2627	9.1177	-5.8650	-13.1058
$a_2 * 10^4$	11.7624	-53.3328	-1.0133	2.8451	0.8062
$a_3 * 10^5$	-8.4480	30.8224	6.0891	-0.63198	0.8180
$a_4 * 10^7$	18.8837	-62.5165	-12.0883	2.4370	-1.4084

$\xi_0^2(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$					
$R_2$	50	0	-50	-100	-150
$a_0 * 10^2$	4.5663	7.4386	5.3157	3.5479	2.5562
$a_1 * 10^4$	-1.8087	2.7827	5.2737	-4.5602	-3.9729
$a_2 * 10^5$	-1.1896	-6.6409	1.9575	1.6356	2.4251
$a_3 * 10^7$	-1.4118	27.8047	-9.8949	1.5637	-6.2557
$a_4 * 10^8$	1.2127	-4.4376	2.14673	-1.6152	8.5239

Tabelle 3.3: Fitparameter für die  $Re$  Abhängigkeit der linearen Koeffizienten der  $m = 2$  Mode einer L2-SPI bei unterschiedlichen Gegenrotationszahlen  $R_2$  und einem Radienverhältnis  $\eta = 0.7$ . Resultate bezüglich der R2-SPI ergeben sich durch entsprechende Symmetrieoperationen (vgl. Tabelle 3.2). Die Berechnung wurde für den Parameterbereich  $-20 \leq Re \leq 20$  mit  $\Delta Re = 1$  durchgeführt.

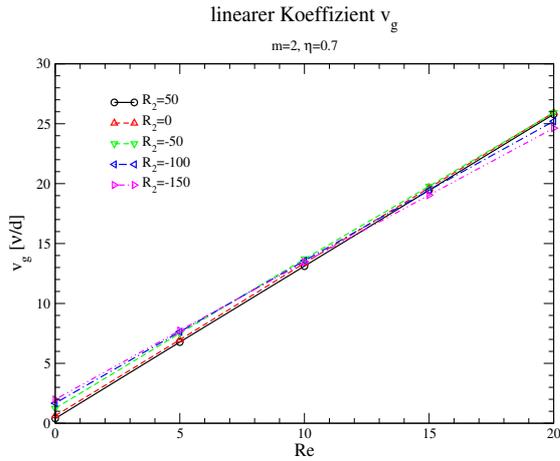


Abbildung 3.4: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $v_g(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.7$ .

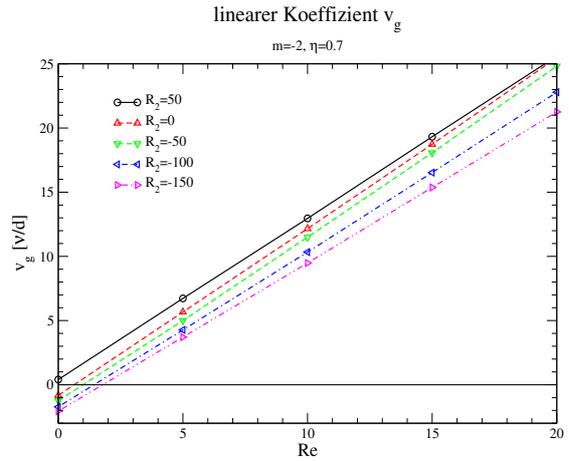


Abbildung 3.5: R2-SPI: Linearer Koeffizient  $v_g(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.7$ .

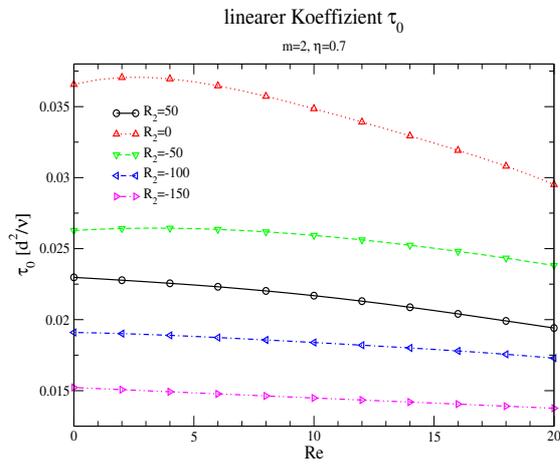


Abbildung 3.6: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $\tau_0(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.7$ .

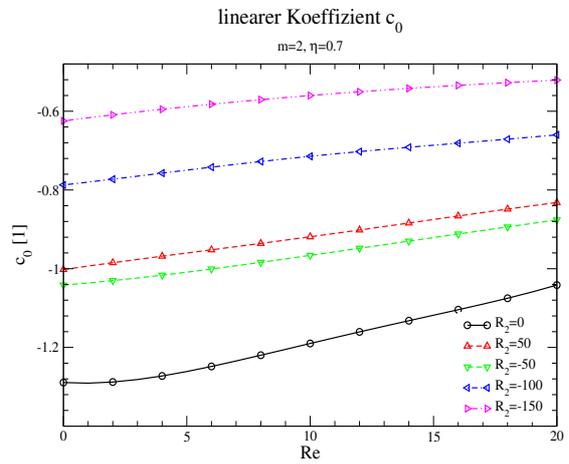


Abbildung 3.7: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $c_0(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.7$ .

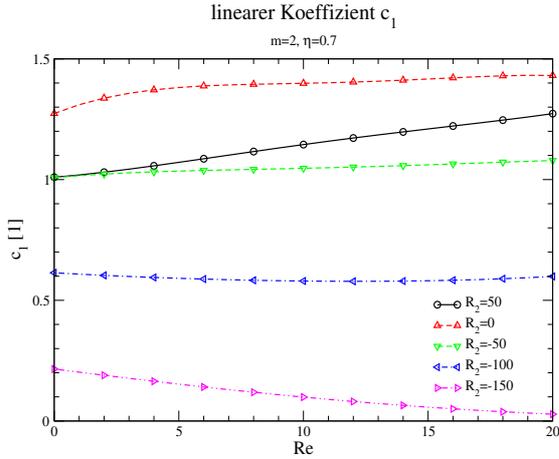


Abbildung 3.8: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $c_1(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.7$ .

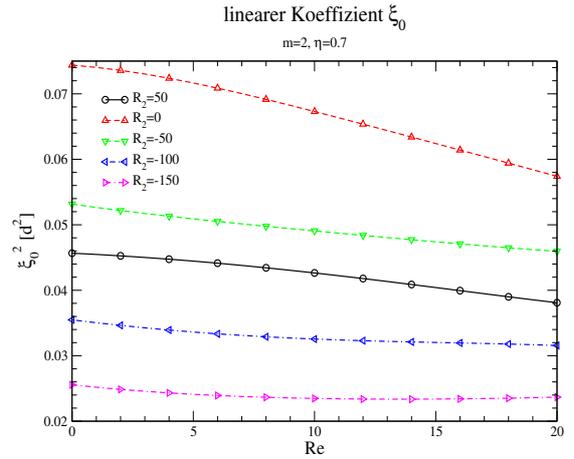


Abbildung 3.9: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $\xi_0(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.7$ .

In Analogie zu den Resultaten für Radienverhältnis  $\eta = 0.7$  sind in den nun folgenden Abb. 3.10-3.14 die Ergebnisse aus der Berechnung der linearen Koeffizienten für  $\eta = 0.5$  zusammengestellt. Dass dies einer genaueren Betrachtung bedarf, dürfte schon bei einem kurzen Blick auf den Verlauf der Koeffizienten in Abhängigkeit von  $Re$  deutlich werden. Denn anders als bei  $\eta = 0.7$  sind bei  $\eta = 0.5$  'Sprünge' in den einzelnen Koeffizienten erkennbar. Zur Erklärung dieses Phänomens sei hierbei auf den folgenden Abschnitt 3.2 verwiesen. Die Berechnung der Koeffizienten wurde mit einer Schrittweite  $\Delta Re = 1$  durchgeführt. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die in Tabelle 3.4 angegebenen Fitparameter nur in dem Bereich der Kurven, von positiven  $Re$  kommend, bis hin zu der auftretenden 'Sprungstelle' gültig sind. D.h. alles rechts des Sprungs in den Abbildungen 3.10-3.14. Dies basiert auf der Tatsache, dass sich bei gewissen Durchflüssen  $Re_0(R_2, \eta)$  die Topologie der Eigenwertflächen entscheidend verändert, wie im Einzelnen später noch zu sehen sein wird.

$$v_g(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$$

$R_2$	-150	-100	-50	0	50
$a_0$	4.3928	4.16799	3.7784	3.4905	9.4315
$a_1$	1.0424	1.06458	1.1336	1.1391	1.06923
$a_2 * 10^3$	2.07191	3.6565	2.4360	21.9350	-37.4391
$a_3 * 10^4$	-0.5341	-1.4051	-0.8927	-17.3608	25.0155
$a_4 * 10^6$	0.8389	2.0429	1.0725	40.8017	-46.1580

$$\tau_0(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$$

$R_2$	-150	-100	-50	0	50
$a_0 * 10^2$	1.4670	1.9573	2.9686	5.3493	1.2946
$a_1 * 10^4$	-2.0453	-3.2302	-6.8232	-35.7863	10.7889
$a_2 * 10^5$	0.4282	0.7779	3.3798	27.8499	-4.6487
$a_3 * 10^6$	-0.0474	-0.2067	-1.3495	-12.4032	-3.1543
$a_4 * 10^8$	0.0308	2.3847	2.16732	21.6902	15.1999

$$c_0(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$$

$R_2$	-150	-100	-50	0	50
$a_0$	-1.5552	-1.9879	-2.8552	-5.2224	-3.4634
$a_1 * 10^2$	5.2886	7.5539	13.0676	44.6925	-9.5436
$a_2 * 10^3$	-1.8689	-2.9696	-6.4583	-34.6029	2.7351
$a_3 * 10^4$	0.4788	0.8231	2.2241	15.4029	-12.6381
$a_4 * 10^6$	-0.6799	-0.1138	-3.5101	-27.4824	16.4911

$$c_1(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$$

$R_2$	-150	-100	-50	0	50
$a_0 * 10^1$	1.3219	1.8641	2.9727	5.8190	3.3004
$a_1 * 10^2$	-5.7030	-9.7263	-14.9073	-50.4119	-2.219
$a_2 * 10^3$	0.6239	5.2985	7.8204	39.1387	-2.745
$a_3 * 10^4$	0.4181	-2.1593	-2.6922	-17.6094	-2.9500
$a_4 * 10^6$	-1.7850	4.0379	4.3681	32.2642	16.2361

$$\xi_0^2(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4$$

$R_2$	-150	-100	-50	0	50
$a_0 * 10^2$	2.7841	3.8584	6.2134	13.5386	31.2941
$a_1 * 10^3$	-0.9414	-1.2235	-2.5969	-15.7441	0.00186
$a_2 * 10^5$	7.0601	6.8605	17.0702	149.673	4.8211
$a_3 * 10^6$	-2.9843	-2.1167	-5.9288	-70.2006	-4.1441
$a_4 * 10^8$	6.0572	3.2909	8.7623	126.550	9.4397

Tabelle 3.4: Fit-Parameter für die  $Re$  Abhängigkeit der linearen Koeffizienten der  $m = 2$  Mode einer L2-SPI für unterschiedliche Gegenrotationszahlen  $R_2$  und einem Radienverhältnis  $\eta = 0.5$ . Resultate bezüglich der R2-SPI ergeben sich durch entsprechende Symmetrieoperationen (vgl. Tabelle 3.2). Die Berechnung wurde für den Parameterbereich von  $Re = 20$  bis hin zur Sprungstelle mit  $\Delta Re = 1$  durchgeführt.

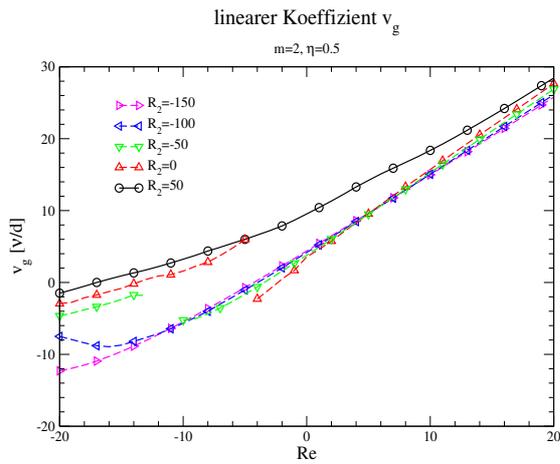


Abbildung 3.10: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $v_g(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$ .

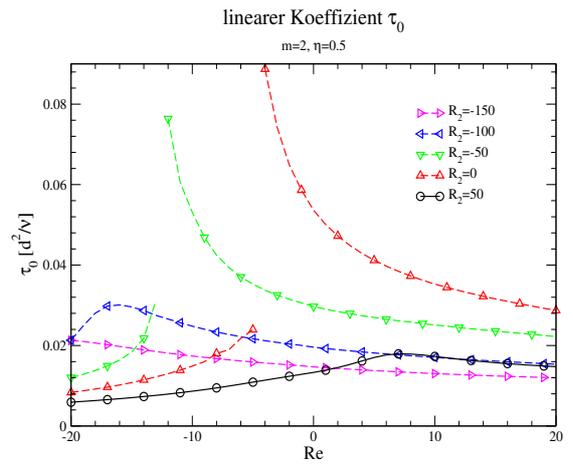


Abbildung 3.11: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $\tau_0(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$ .

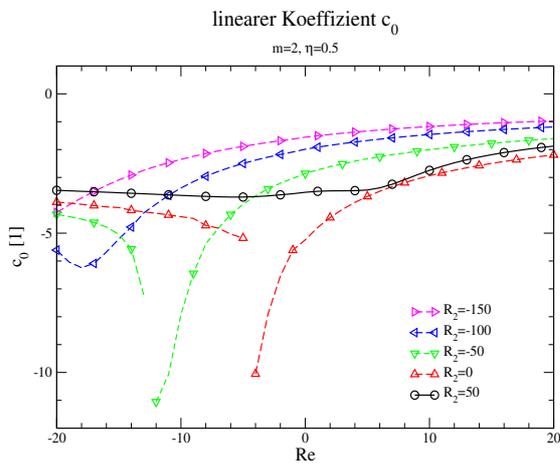


Abbildung 3.12: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $c_0(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$ .

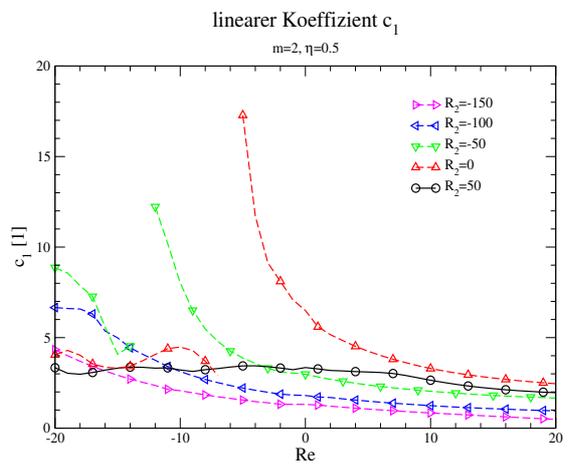


Abbildung 3.13: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $c_1(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$ .

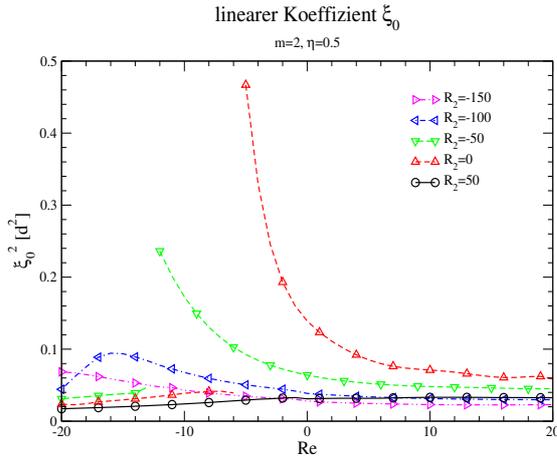


Abbildung 3.14: L2-SPI: Linearer Koeffizient  $\xi_0^2(Re)$  bei Variation von  $Re$  und verschiedener  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$ .

In den Abb. 3.10-3.14 der linearen Koeffizienten für  $\eta = 0.5$  ist im Gegensatz zu  $\eta = 0.7$  (Abb. 3.4-3.9) ein signifikant anderes Verhalten zu erkennen. Es sieht so aus, als gäbe es ein  $Re_0(R_2, \eta)$ , bei dem der Verlauf der Koeffizienten einen Sprung besitzen, eine Erscheinung, die beim zuvor untersuchten größeren Radienverhältnis  $\eta = 0.7$  nicht auftrat. Auch bei Strukturen  $M = 0, \pm 1$  für  $\eta = 0.5$  konnte im Bereich  $-20 \leq Re \leq 20$  nichts ähnliches gefunden werden. Die Lage der 'Sprungstelle' korreliert mit  $R_2$  und  $\eta$  in der Art, dass eine starke Gegenrotation  $R_2$  diese zu schwächeren Gegendurchflüssen  $Re$  hin verschiebt. So zum Beispiel liegt diese  $Re_0$  bei  $R_2 = -150$  offensichtlich mit  $Re_0 < -20$  außerhalb des untersuchten Durchflussbereiches, während eine schwächere Gegenrotation  $R_2 = -50$  diese zu deutlich betragskleineren Durchflüssen  $-12 < Re < -11$  verschiebt.

Die Gruppengeschwindigkeit  $w_g(Re)$  spielt eine zentrale Rolle, wie in den folgenden Kapiteln deutlich wird. Abgesehen von den in der Abb. 3.10 gesehenen Sprüngen nimmt die  $w_g$  mit zunehmendem Durchfluss  $Re$  für beinahe alle untersuchten Gegenrotationen  $R_2$  kontinuierlich zu. Für  $Re > 0$  treten keine Sprünge auf und die Zunahme erfolgt linear. Betragsmäßiges Anwachsen von  $R_2$  führt zu einer geringeren Steigung der Kurven.

### 3.1.5 Resumé

Nach der theoretischen Beschreibung der Idee der Amplitudengleichungen erfolgte die Herleitung der Koeffizienten der linearen Terme der Amplitudengleichung als Ableitungen des komplexen Eigenwertes nach Wellenzahl und Reynoldszahl. Weiterhin wurden die Koeffizienten im Hinblick auf Symmetrien untersucht und in Abhängigkeit des Durchflusses berechnet. Hierbei zeigte sich ein für 2-SPI neues und außergewöhnliches Verhalten, welches für TVF und 1-SPI noch nicht auftrat. Wie in den Abb. 3.10-3.14 gut zu erkennen, traten 'Sprünge' in den linearen Koeffizienten auf.

## 3.2 Aufspaltung der marginalen Kurven

Um das im vorherigen Abschnitt gesehene Verhalten der 'Sprünge' der linearen Koeffizienten in Abhängigkeit der Kontrollparameter bei  $\eta = 0.5$  verstehen zu können, bedarf es einer näheren Betrachtung der zugrunde liegenden Topologie der komplexen Eigenwerte  $\sigma(R_1, k) = \gamma(R_1, k) + i\omega(R_1, k)$ . Im Folgenden werden zunächst die beiden Fälle  $R_2 = 0$  und  $R_2 = -50$  betrachtet. Das Verhalten für andere  $R_2$  läßt sich auf diese Fälle zurückführen.

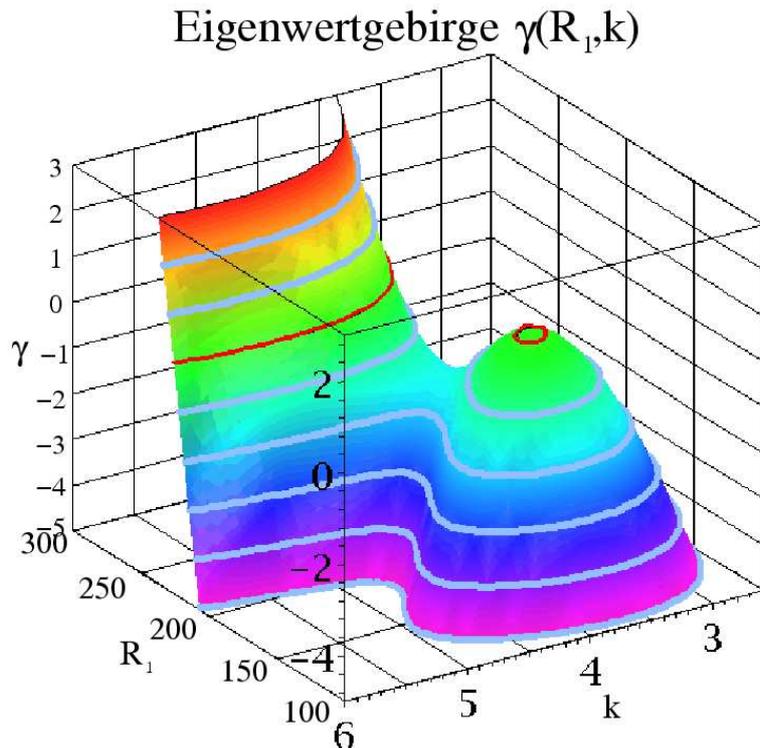


Abbildung 3.15: Topologie von  $\gamma(R_1, k)$  der dominanten  $m = 2$  Mode einer L2-SPI für  $\eta = 0.5$ . Rot ( $\gamma = 0$ )-Isolinie, marginale Kurve; violett→rot: anwachsendes  $\gamma$ . Kontrollparameter:  $Re = -6$ ,  $R_2 = 0$ .

Für  $R_2 = 0$  tritt bei den linearen Koeffizienten im Bereich  $-7 < Re < -5$  ein 'Sprung' auf (Abb. 3.10-3.14). Somit stellt sich die Frage nach der Ursache und den physikalischen Konsequenzen dieses Verhaltens.

Hierzu ist für L2-SPI in Abb. 3.15 die Topologie des Realteils  $\gamma(R_1, k)$  des komplexen Eigenwertes  $\sigma(R_1, k)$  als Funktion von  $R_1$  und  $k$  für festes  $Re = -6$  und  $R_2 = 0$  dargestellt. Deutlich zu erkennen ist ein einzelner Berg, der die  $\gamma = 0$  Fläche an der roten Linie durchstößt. Zur Verdeutlichung wurden die  $\gamma$  Werte mit Falschfarben kodiert und zusätzlich die

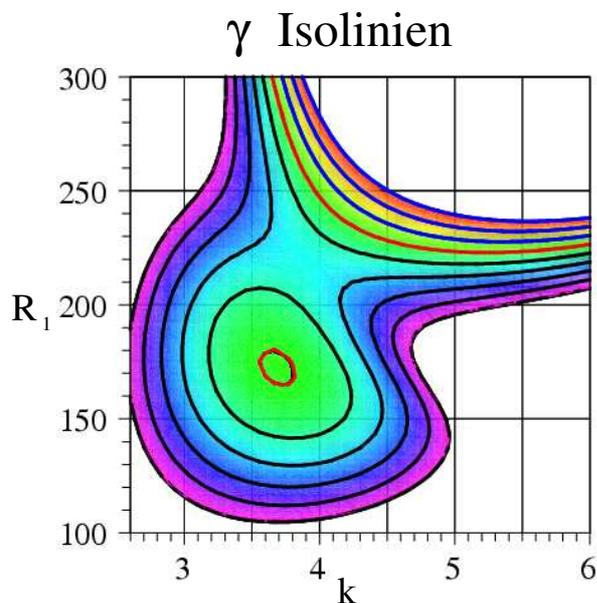


Abbildung 3.16: Projektion der  $\gamma$  Isolinien  $\Delta\gamma = 1$  aus Abb. 3.15 in die  $(R_1, k)$  Ebene für  $\eta = 0.5$ ; Rot:  $\gamma = 0$  (marg. Kurve), blau:  $\gamma > 0$ , schwarz:  $\gamma < 0$ ; violett→rot: anwachsendes  $\gamma$ . Kontrollparameter:  $Re = -6$ ,  $R_2 = 0$ .

Isolinien einzelner  $\gamma$  Werte von  $\gamma = -5..3$  in die Grafik mit aufgenommen. Die rote Kurve,  $\gamma = 0$  Isolinie, stellt die marginale Kurve dar. Für die hier gewählten  $R_2$  und  $Re$  besteht diese aber ganz offensichtlich aus zwei **nicht** zusammenhängenden Teilkurven.

In Abb. 3.16 sind die Projektionen der  $\gamma$ -Isolinien in die  $(R_1, k)$  Ebene zu sehen, was der gewohnten Darstellung der marginalen Kurven  $R_{1,marg}(k)$  entspricht. Analog zu Abb. 3.15 sind die  $\gamma$ -Werte ebenfalls mit Falschfarben in die Grafik aufgenommen worden. Mit den beiden Abbildungen 3.15 und 3.16 läßt sich nun die zuvor gestellte Frage nach dem 'Wie' beantworten und die zunächst merkwürdig erscheinenden Sprünge in den linearen Koeffizienten verstehen. Wie im vorherigen Abschnitt 3.1.2 beschrieben, mußten zur Ermittlung der linearen Koeffizienten die partiellen Ableitungen von Real- und Imaginärteil des komplexen Eigenwertes  $\sigma(R_1, k)$  bis zur zweiten Ordnung bestimmt und am jeweils kritischen Wert ausgewertet werden. Eben diese doch sehr deutliche Änderung der kritischen Werte, hervorgerufen durch die zwei nicht zusammenhängenden Bereiche der  $\gamma = 0$  Kurve, ist die Ursache der Sprünge in den linearen Koeffizienten. Diese wurden in den Abb. 3.10-3.14 bzgl. des auferlegten Durchflusses aufgetragen. Aber gerade die Änderung von  $Re$  führt zur Aufspaltung der marginalen Kurve in die beiden nicht zusammenhängenden Bereiche

wie in Abb. 3.21) erkennbar.

Die Lösung, die der Code als diejenige der marginalen Kurve ausgibt, ist die jeweils einfachste der gefundenen. Randwertprobleme sind i.A. nicht eindeutig lösbar. Zusätzliche Lösungen können beim hier betrachteten Eigenwertproblem z.B. weitere radiale Nullstellen und somit eine kompliziertere Wirbelstruktur besitzen. Solche Lösungen besitzen natürlich auch verschiedene  $R_{1,marg}$ , wobei  $R_{1,marg}$  mit der Anzahl der radialen Nullstellen der jeweiligen Eigenfunktion wächst. Stellt man nun die Frage nach der einfachsten dieser Lösungen, so tritt diese bei dem niedrigsten  $R_{1,marg}$  auf.

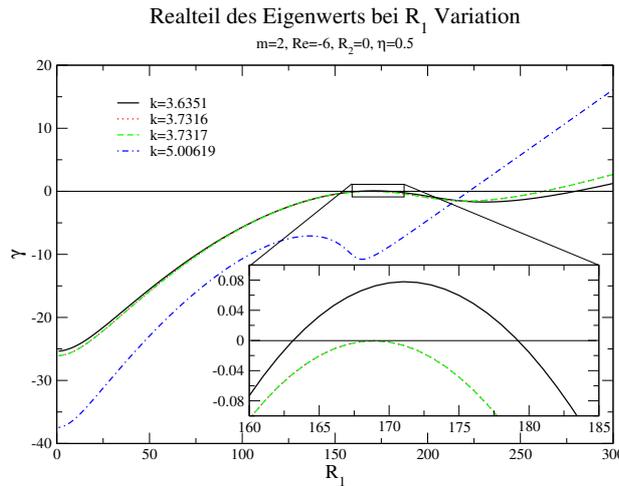


Abbildung 3.17: Topologisches Verhalten des Realteils  $\gamma(R_1)$  des komplexen Eigenwertes  $\sigma(R_1)$  bei Variation von  $R_1$  bei festem  $k$  bzgl. der dominanten  $m = 2$  Mode einer L2-SPI für  $\eta = 0.5$ . Kontrollparameter:  $Re = -6$ ,  $R_2 = 0$

Die Betrachtung des Realteils  $\gamma(R_1)$  als Funktion von  $R_1$  bei festem  $k$  bestätigt dies. Hierzu wurde, wie in Abb. 3.17 zu sehen,  $\gamma(R_1)$  für jeweils zwei verschiedene Wellenzahlen  $k < k_0$  und zwei weitere mit  $k > k_0$  aufgetragen.  $k_0$  symbolisiert dabei gerade die Wellenzahl, bei der der Sprung für feste Kontrollparameter  $Re$  und  $R_2$  auftritt. Dabei wurden zwei der  $k$ -Werte unmittelbar links bzw. rechts des Sprungs gewählt (siehe hierzu auch Abb. 3.18).

Mittels Abb. 3.17 läßt sich das Phänomen des aufgetretenen 'Sprungs' in den linearen Koeffizienten weiter aufklären. Der Grund hierfür liegt letztendlich in der Tatsache begründet, dass es genau einen fest vorgegebenen Satz an Parametern  $Re, R_2, \eta$  und  $k_0^2$  gibt, bei welcher die  $\gamma(R_1)$  Kurve in der  $(\gamma, R_1)$ -Ebene in Abb. 3.17 gerade nur noch einen 'Berührungspunkt' mit der  $\gamma = 0$  Ebene besitzt. Ein bereits minimal größere Wellenzahl  $k$  bedingt das Verschwinden dieses 'Berührungspunktes', so dass der Code die zuvor noch existie-

<sup>2</sup>Der Index 0 symbolisiert dass es sich um gerade die Wellenzahl handel, bei der die Kurve bei  $\gamma = 0$  gerade noch einen Berührungspunkt besitzt.

rende Nullstelle nun nicht mehr finden kann und somit als Lösung die nächste Nullstelle auswählt. Diese liegt jedoch bei einer größeren Reynoldszahl  $R_1$  wie in Abb. 3.18 zu erkennen ist. In den Abb. 3.17 und 3.18 liegt dieses  $k_0$  bei dem gegebenen Parametersatz

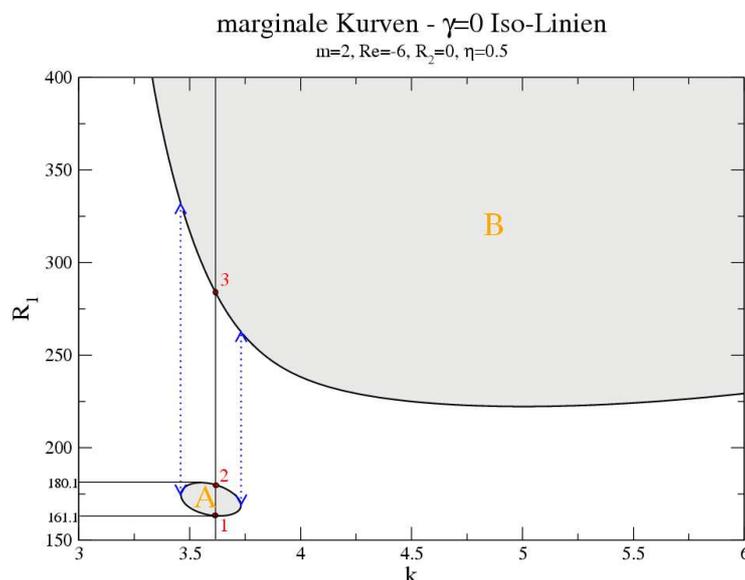


Abbildung 3.18: Verlauf der marginalen Kurven der L2-SPI gewonnen als  $\gamma = 0$ -Isolinie aus Abb. 3.15. Deutlich zu erkennen sind die beiden 'Sprünge' für  $3.4606 < k_{0,1} < 3.4607$  sowie  $3.7316 < k_{0,2} < 3.7317$ . Die durchgehende schwarze Linie markiert eine feste Wellenzahl  $k = 3.63511$  für die drei Lösungen existieren (hier mit 1, 2, 3 gekennzeichnet). Kontrollparameter:  $Re = -6$ ,  $R_2 = 0$ ,  $\eta = 0.5$ ; grau markierten Bereiche A, B charakterisieren wachstumsfähige Bereiche bei entsprechender Wellenzahl  $k$

( $\eta = 0.5, Re = -6, R_2 = 0$ ) zwischen  $3.7316 < k_0 < 3.7317$ . Zur besseren Anschauung wurde der Bereich, in dem sich der 'Berührungspunkt' befindet im unteren Teil der Graphik 3.17 nochmals vergrößert dargestellt. Der Unterschied der beiden Kurven für  $k = 3.7316$  (rot) und  $k = 3.7317$  (grün) ist leider so gering, dass er hier nicht mehr graphisch aufgelöst werden kann und man auf die numerisch erhaltenen Zahlenwerte zurückgreifen muss. Im Fall  $k = 3.7317$  (hier gibt es nur eine Lösung) bleibt die Kurve in diesem Bereich immer unterhalb der  $\gamma = 0$  Isolinie.

Zur weiteren Diskussion dieses Problems sei der Durchfluss im nun Folgenden, wenn nicht explizit erwähnt, auf den festen Wert  $Re = -6$  fixiert. Die zugehörigen marginalen Kurven (inkl. höheren Lösungen) sind in Abb. 3.18 dargestellt. Außergewöhnlich ist die Tatsache, dass es sich nicht wie gewohnt um nur eine, sondern um mehrere marginale Kurven handelt, die sich aus der Topologie des Realteils  $\gamma(R_1, k)$  aus Abb. 3.15 ergeben. Grau eingefärbte Bereiche A, B markieren hierbei solche, in denen die  $m = 2$  Mode der L2-SPI

wachstumsfähig ist. Es gibt also die Möglichkeit, dass das System bei Erhöhung von  $R_1$  zunächst in den Bereich  $A$  gelangt und somit wachstumsfähige Moden bei gewissen  $k$  zur Verfügung stehen. Bei weiterem Anwachsen von  $R_1$  kehrt das linearisierte System nach Durchgang durch  $A$  in den Grundzustand zurück, bis es schließlich für noch größere  $R_1$  den Bereich  $B$  erreicht, wo erneut wachstumsfähige Moden auftreten. Diese drei  $\gamma = 0$  Schwellen sind von entscheidender Bedeutung, denn nach der Bifurkationstheorie muss bei allen jeweils eine Lösung herausbifurkieren, oder sich das Stabilitätsverhalten ändern. Die Untersuchung dieses Bifurkationsverhaltens mittels der vollen nichtlinearen NSE sollte von besonderem Interesse sein.

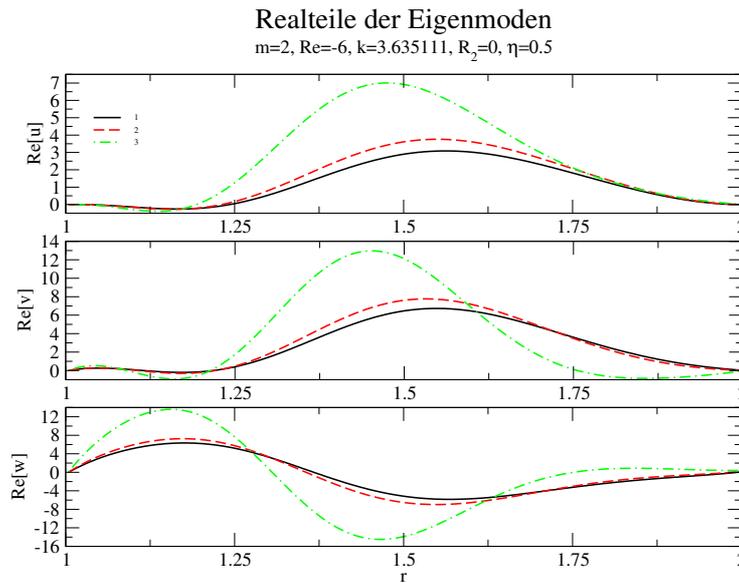


Abbildung 3.19: L2-SPI: Realteile der Eigenmoden  $u, v, w$  bzgl. der drei unterschiedlichen Lösungen 1, 2, 3 aus Abb. 3.18 für  $k = 3.635111$ . Kontrollparameter:  $Re = -6, R_2 = 0; \eta = 0.5$ ; verwendete Normierung: radiales Feld in Spaltmitte  $u(d = 0.5) = 15$ .

Ausgehend hiervon drängt sich jedoch die Frage auf, um was für Lösungen 1, 2, 3 auf der marginalen Kurve es sich handelt. Ganz offensichtlich existieren Bereiche, in denen es bei fixierter Wellenzahl  $k$  (vgl. Abb. 3.18 z.B.  $k = 3.635111$ ) drei unterschiedliche Lösungen, bedingt durch die Topologie der  $\gamma(R_1, k)$ -Fläche (Abb. 3.15) gibt. Hierzu betrachte man sich die Realteile der Eigenmoden  $u, v$  und  $w$  bzgl. der in Abb. 3.18 eingetragenen unterschiedlichen Lösungen 1, 2 und 3.

Wie aus Abb. 3.19 hervorgeht, unterscheiden sich die Realteile der Eigenmoden der Lösungen 1 und 2 relativ wenig voneinander, dafür weisen sie aber eine um so größere Differenz zur Lösung 3 auf. Dies begründet sich darin, dass 1 und 2 gemäß Abb. 3.15 und 3.18

auf einer gemeinsamen, einfach zusammenhängenden Isolinie liegen und somit dieselbe topologische Struktur besitzen sollten. Der Unterschied dieser beiden Lösungen im Hinblick auf die zugehörigen  $R_1$  Werte zeigt sich lediglich in einer sehr schwachen Verschiebung der Realteile der Eigenmoden zum inneren Zylinder hin. Wichtig ist aber, dass sie z.B. *dieselbe Anzahl* von Nullstellen in allen, insbesondere aber auch in der axialen Eigenmode besitzen. Ganz anders sieht dies bei der Lösung 3 aus. Bei dieser besitzen die Eigenmoden in  $\varphi$ - und  $z$ -Richtung im Realteil jeweils eine Nullstelle mehr im Vergleich zu den beiden Lösungen 1 und 2. Desweiteren ist auch eine deutlich stärkere Verschiebung der Eigenmoden zum inneren Zylinder hin zu erkennen. Dies ist eine weitere Bestätigung des Sprung-Phänomens aus Abb. 3.17. Bewegt man sich nämlich aus dem Bereich in dem drei Lösungen (Abb. 3.18) zu vorgegebenem  $k$  existieren heraus, liegt der in Abb. 3.15 dargestellte Berg unterhalb der  $\gamma = 0$  Ebene und der Code kann als marginale Lösung nur diejenige liefern, die sich auf der  $\gamma = 0$  Isolinie befindet, zu der auch die Lösung 3 gehört.

Um zu verifizieren, dass es sich bei 3 wirklich um eine von 1 und 2 verschiedene Lösung handelt, betrachte man sich die in Abb. 3.20 dargestellten Vektorplots des  $(u, w)$ -Feldes in der  $\varphi = \text{const.}$ -Ebene, jeweils für einen  $k$  Wert links bzw. rechts des Sprungs aus Abb. 3.18. In Abb. 3.20a), in dem der komplette radiale Bereich zu erkennen ist, ist nur eine sehr geringe Veränderung feststellbar. Der wesentliche Unterschied ergibt sich aus Abb. 3.20b), die sich auf den äußersten Rand des Spaltes zwischen den Zylindern bezieht. Hier zeigt sich, dass im Fall  $k = 3.7316$ , rote Pfeile, (hier existieren 3 Lösungen mit  $\gamma = 0$ ) zwei weitere, noch sehr kleine Wirbel gegenüber  $k = 3.7317$ , blaue Pfeile, (hier existiert nur eine Lösung mit  $\gamma = 0$ ) am äußeren Rand hinzukommen.

Als letztes soll noch kurz auf die Veränderung der Topologie des Berges bei Änderung des Durchflusses  $Re$  ( $R_2$  fest) bzw. bei Änderung der Gegenrotation  $R_2$  ( $Re$  fest) eingegangen werden. Hierzu wurde die  $\gamma$ -Flächen für unterschiedliche  $Re$ , bzw.  $R_2$  berechnet und die daraus als  $\gamma = 0$  Isolinien erhaltenen marginalen Kurven in den Abb. 3.21 und 3.22 zusammengestellt.

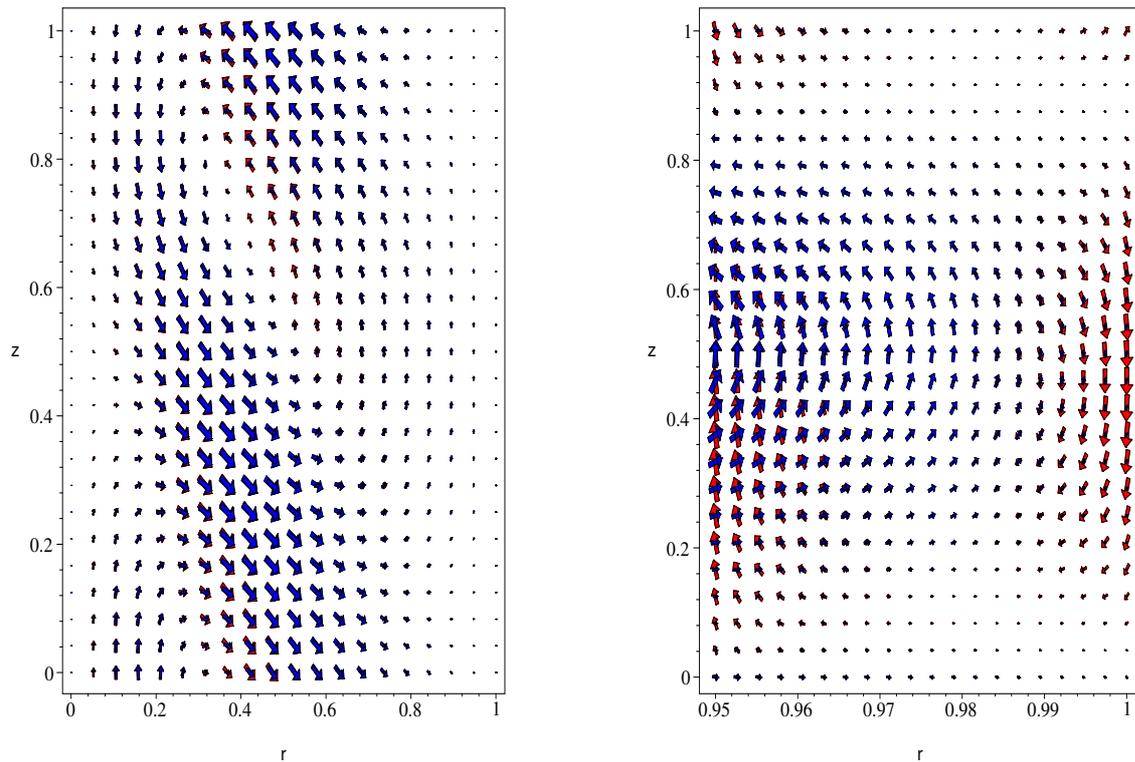


Abbildung 3.20: Vektorplot des  $(u, w)$ -Feldes der  $m = 2$  Mode einer L2-SPI; blau:  $k = 3.7316$ , rot:  $k = 3.7317$ , links: gesamter radialer Bereich; rechts: äußerer radialer Bereich, Kontrollparameter:  $Re = -6$ ,  $R_2 = 0$ ,  $\eta = 0.5$

Qualitativ verhält es sich so, dass der Berg mit zunehmendem  $Re$  und festem  $R_2$  ständig weiter über die  $\gamma = 0$  Ebene hinauswächst (vgl. Abb. 3.21), wobei sich die marginalen Kurven (hier gilt bekanntlich  $\gamma = 0$ ) aus dem Bereich zwischen eben diesem Berg und dem restlichen Gebirge hinausschieben. Am Ende dieses Vorgangs ist der anfangs vorhandene 'Berg' vollkommen in die übrige Struktur integriert.

Im Bezug auf die linearen Koeffizienten bedeutet dies, dass sich diese, von stark negativen  $Re$  kommend (von links in den Abb. 3.10- 3.14), auf Lösungen in dem Bereich beziehen, wo die erste Nullstelle sozusagen 'verschwunden' ist, da sich der angesprochene Berg vollständig unterhalb der  $\gamma = 0$  Ebene befindet. Hier existieren nur diejenigen Lösungen zu höheren  $R_{1,marg}$  und folglich auch  $R_{1c}$  Werten. Dies führt zu betragsmäßig deutlich kleineren Werten der linearen Koeffizienten im Vergleich zu den unmittelbar rechts der Sprungstelle liegenden. In Abb. 3.21 ist auch der Verlauf der Bergspitze bei Veränderung von  $Re$  und fixiertem  $R_1 = 171.88$  dargestellt. Diese entspricht gerade der Reynoldszahl, bei der die Bergspitze die  $\gamma = 0$  Ebene gerade noch für  $Re = -6.15$  berührt. D.h für dieses  $R_1$  ist der Bereich A aus Abb. 3.19 auf einen einzelnen Punkt zusammengeschrumpft. Für stärker negative  $Re$  verschwindet dieser dann vollständig, wie auch in Abb. 3.21 (links)

für  $Re = -7$  (orange, strichpunktierte Linie) erkennbar.

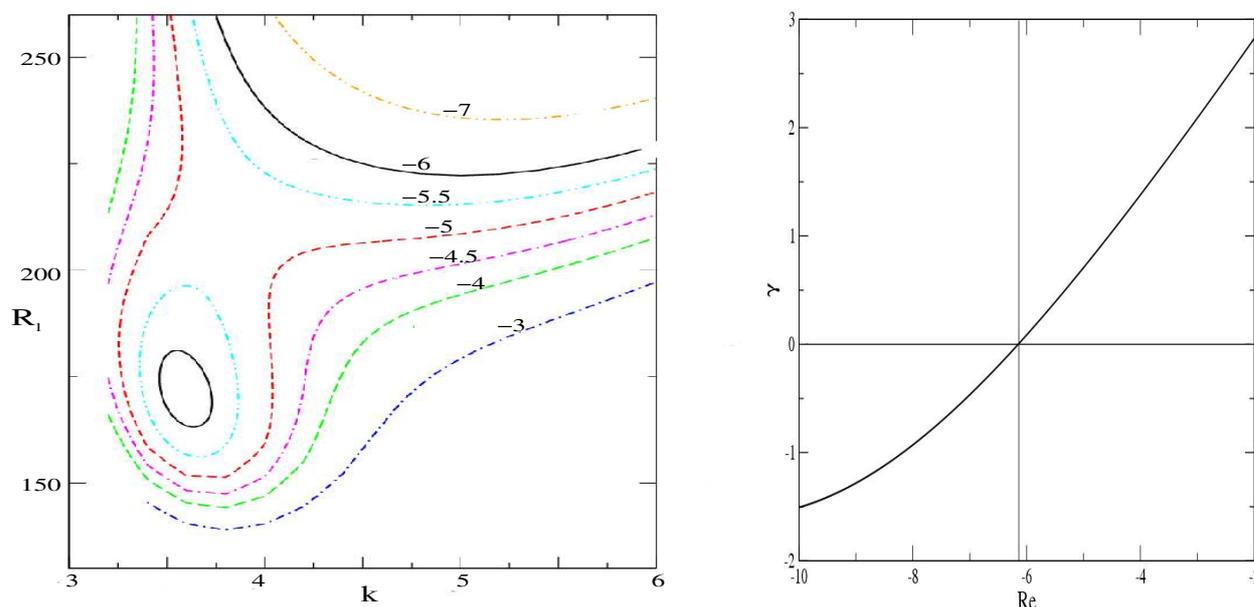


Abbildung 3.21: links: Marginale Stabilitätskurven der L2-SPI bei Variation von  $Re$ . Kontrollparameter:  $R_2 = 0$ ; rechts: Verlauf der Bergspitze bzgl. der  $\gamma = 0$ -Ebene bei Variation von  $Re$ . Kontrollparameter:  $R_1 = 171.88, R_2 = 0, \eta = 0.5$

Die bereits weiter oben angesprochene  $R_2$ -Abhängigkeit ist ebenfalls sehr gut aus den Abb. 3.10-3.14 ablesbar. Auch die Abnahme der Gegenrotation  $R_2$  (zu stärker positiven Werten) bedingt (vgl. auch Abb. 3.21) ein Verschieben der Sprungstelle zu stärkeren Durchflüssen  $Re$  hin; z.B. liegt diese für  $R_2 = -50$  im Bereich  $-12 \leq -11$  und für  $R_2 = 0$  bei  $-7 \leq -6$ . Es fällt jedoch auf, dass die linearen Koeffizienten bei einem Wert von  $R_2 = -150$  im gesamten untersuchten Bereich kein besonderes Verhalten aufweisen (hierbei bleibt die niedrigste Nullstellenlösung erhalten). Mittels Rechnung zu weiter negativen Durchflüssen konnte aber auch hier ein qualitativ ähnliches Verhalten wie bei geringer Rotation festgestellt werden. Auch für den Fall gleichgerichteter Rotation  $R_2 = 50$  ist kein Sprung mehr in den Koeffizienten zu erkennen. Weitere Rechnungen hierzu zeigten ebenfalls, dass es in diesem Bereich nur die 'höhere' Lösung gibt, da der Berg bei dem dort vorgegebenen Parametersatz immer unterhalb der  $\gamma = 0$  Ebene verbleibt.

Um einen qualitativen Einblick in den Verlauf der marginalen Kurven bei Variation eines gegebenen Parametersatzes  $R_1, R_2, k, \gamma$  zu gewinnen, ist in Abb. 3.23 die  $\gamma = 0$  Isofläche  $C(R_1, k, R_2)|_{\gamma=0}$ <sup>3</sup> als Funktion der Kontrollparameter  $R_1, R_2$  für  $k$  dargestellt. Ein Schnitt bei konstantem  $R_2$  liefert somit direkt die hierzu gehörende marginale Kurve.

<sup>3</sup>(Auf Anregung von, nennen wir ihn Christian H., oder nein doch lieber C. Hoffmann: 'Wäre es nicht schön 4D als 3D darzustellen, da erkennt man dann alles auf einen Blick!')

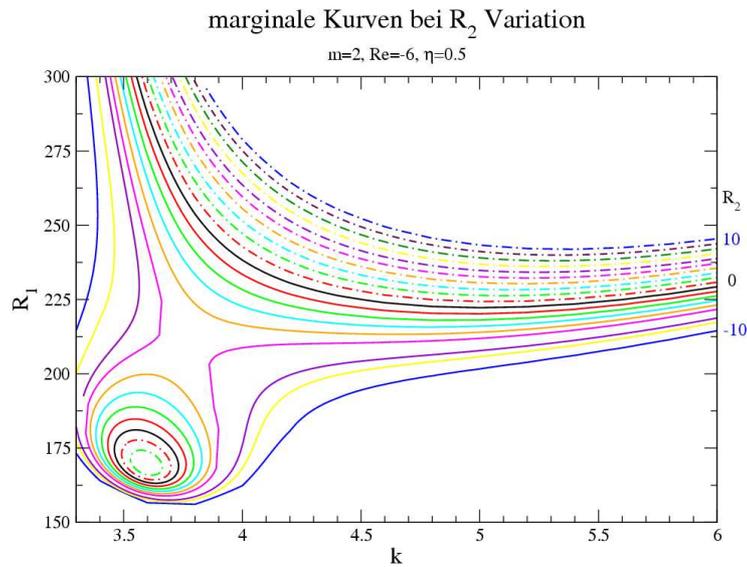


Abbildung 3.22: Marginale Stabilitätskurven der L2-SPI bei Variation von  $R_2$ . Kontrollparameter:  $Re = -6, \eta = 0.5$  Zur besseren Übersichtlichkeit wurden die Kurven für  $R_2 = -6, -9$  weggelassen. Für die durchgezogene Linien gilt  $R_2 < 0$  und bei strichpunktierten  $R_2 > 0$ ; schwarze Kurve:  $R_2 = 0$ ; gleich Farben gehören zu identischen Beträgen  $|R_2|$ .

Die Fläche als Ganzes stellt also entsprechend die 'marginale Fläche' für  $R_1, R_2, k, \gamma$  dar. Gut zu erkennen ist ein Bereich  $-5.5 < R_2 < 2.5$  in dem ähnlich zu Abb. 3.15 ein von dem übrigen Gebirge abgesetzter Berg auftritt. In diesem  $R_2$  Bereich besitzt die marginale Kurve, analog zu Abb. 3.18 mehr als nur eine Lösung.

Hierzu sind in Abb. 3.24 die Bifurkationsschwellen  $R_{1,marg}(R_2)$  für zwei unterschiedliche aber feste Wellenzahlen  $k = 3.6$  und  $k = 4.5$  der  $m = 2$  Mode einer L2-SPI aufgetragen. Dies entspricht gerade einem Schnitt in Abb. 3.23 bei der entsprechenden Wellenzahl. Hierzu wurde  $k = 3.6$  so gewählt, dass diese etwa der in Abb. 3.18 eingezeichneten Wellenzahl  $k = 3.6355$  entspricht, wobei jedoch entscheidend ist, dass es zu dieser Wellenzahl genau 3 Schnittpunkte 1, 2 und 3 mit den marginalen Kurven gibt. Hier sollten also auch drei Lösungen an eben diesen Schnittpunkten herausbifurkieren können. Betrachtet man sich die in Abb. 3.24 dargestellten Bifurkationsschwellen  $R_{1,marg}(R_2)$  so besitzt die rote Kurve die 'gewohnte' Darstellung; diese besitzt ihr Minimum für  $R_2 \approx -75$  und wächst sowohl für negativere, als auch positivere  $R_2$  (hierbei deutlich stärker) kontinuierlich an. Ein ganz anderes und bislang nicht beobachtetes Anwachsverhalten zeigt sich aber für die Wellenzahl  $k = 3.6$  (blaue Kurve). Entsprechend dieser existiert ein Bereich, für den bei Erhöhung des Kontrollparameters  $R_1$ , keine Wellenzahl mehr linear wachstumsfähig ist. Bei dem hier gegebenem Parametersatz  $Re = -6, \eta = 0.5$  liegt dieser bei  $R_2 = -5.47..2.82$ , bzw. bei festem  $R_2 = 0$  wie aus Abb. 3.18 ersichtlich für Wellenzahlen  $k = 3.45..3.73$ .

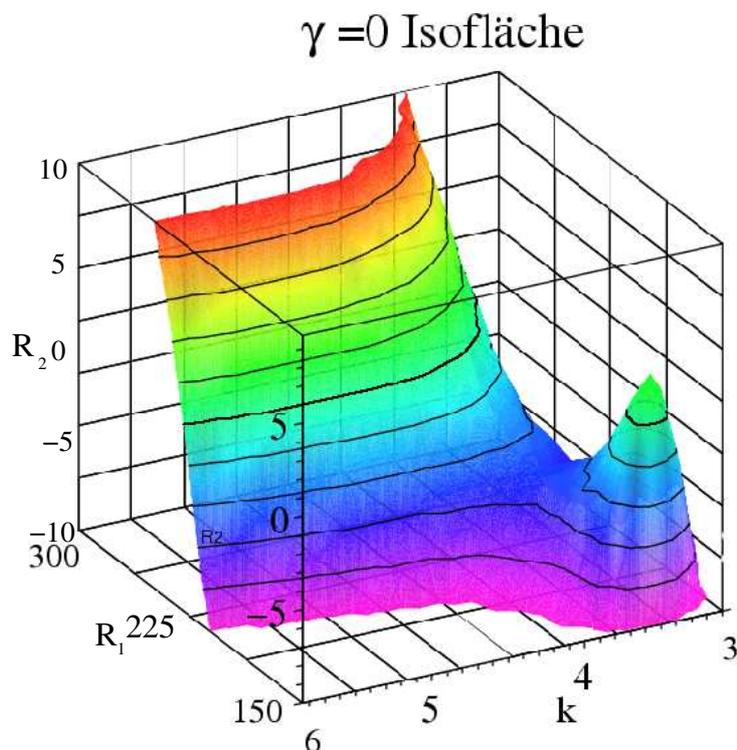


Abbildung 3.23:  $\gamma = 0$  Isofläche  $C(R_1, k, R_2)|_{\gamma=0}$  einer L2-SPI über der  $(R_1, k)$  Ebene als Funktion von  $-10 \leq R_2 \leq 10$ ; Diese kennzeichnet den Verlauf der marginalen Kurven bei Variation von  $R_2$ ; Kontrollparameter:  $Re = -6, \eta = 0.5$ .

In Abb. 3.24 läuft die Kurve für  $k = 3.6$  bei kontinuierlich wachsendem  $R_1$  ab einem  $R_2 = 2.82$  zunächst rückwärts zu kleineren  $R_2$  hin. Ab  $R_2 = -5.47$  ändert sich dies erneut und mit wachsendem  $R_1$  nehmen auch die Werte von  $R_2$  zu.

Die Ursache des 'Sprung-Phänomens' ist letztendlich auf die numerisch Berechnung mittels *Shooting-Verfahren* zurückzuführen. Durch die, abhängig vom Parametersatz, auftretende Ausbildung eines einzelnen 'Bergs' aus dem gesamten Gebirge der Eigenwertfläche  $\sigma(R_1, k)$ , insbesondere des Realteils  $\gamma(R_1, k)$ , heraus und dessen Lage zur  $\gamma = 0$  Ebene, kann es bereits bei sehr kleinen Änderungen in  $Re$  ( $R_2$ ) zu entsprechend großen in  $R_1$  kommen. Physikalisch scheint es so zu sein, dass sich die  $M = 2$  Strukturen bei gegebenen  $R_2$  ( $Re$ ) ab einem gewissen  $Re_0$  ( $R_{2,0}$ ) nicht mehr in der Nähe der Wellenzahlen  $k$  wie bei etwas größeren  $Re$  ( $R_2$ ) stabilisieren lassen. Bei solchen Parametersätzen scheint dies nur bei entsprechend großen Reynoldszahlen  $R_1$  der Fall zu sein.

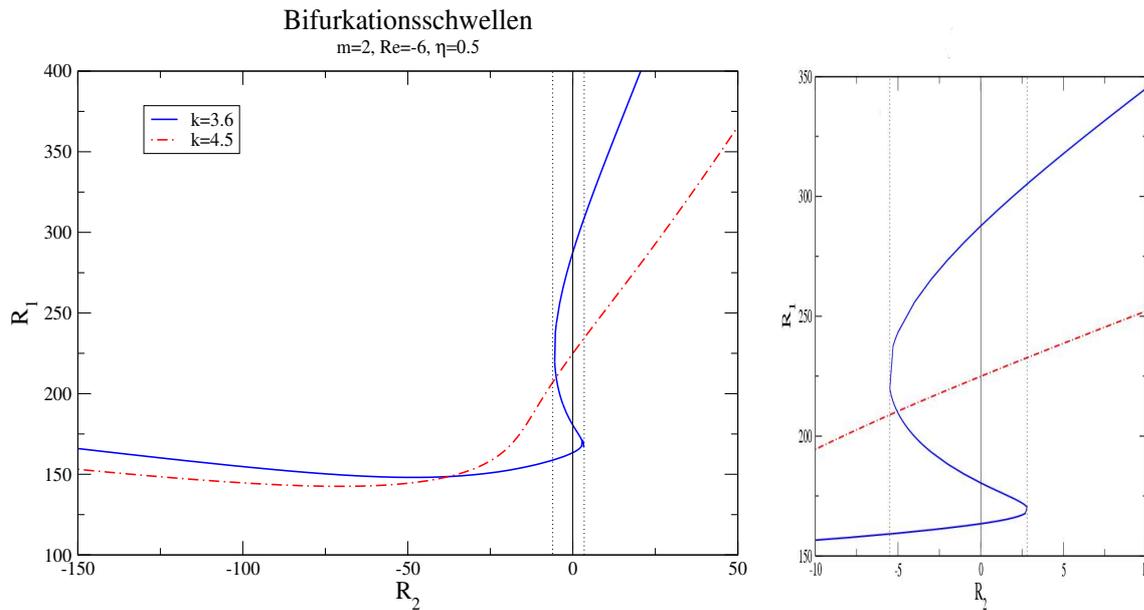


Abbildung 3.24: Bifurkationsschwellen  $R_1(R_2)$  einer L2-SPI für feste Wellenzahlen  $k = 3.6$  und  $k = 4.5$ ; Kontrollparameter:  $Re = -6, \eta = 0.5$ ; rechts ist der entscheidende Bereich der Schwellen nochmals vergrößert dargestellt.

Neben den hier diskutierten Abhängigkeiten der Aufspaltung der marginalen Kurve in zwei nicht mehr zusammenhängende Teilbereiche bzgl. Durchfluss  $Re$  und Gegenrotation  $R_2$  konnte weiterhin noch eine Abhängigkeit mit dem Radienverhältnis  $\eta$  festgestellt werden. In dem hier hauptsächlich untersuchten Bereich  $-20 \leq Re \leq 20$  trat das 'Phänomen' erst unterhalb eines Radienverhältnisses von  $\eta \leq 0.519$  auf. Diese Aufspaltung wird auch bei der nun folgenden Diskussion der Stabilitätsschwellen von entscheidender Bedeutung sein.

### 3.2.1 Resumé

Das entscheidende Ergebnis dieses Abschnitts ist die für L2-SPI gefundene komplexe Topologie der marginalen Stabilitätsflächen, wie z.B. in Abb. 3.23 dargestellt ist. Abb. 3.15 zeigt, wie die  $\gamma$ -Fläche der L2-SPI einen einzelnen Berg ausbildet, dessen Lage bezüglich der  $\gamma = 0$ -Ebene von entscheidender Bedeutung ist. Durchstößt er die  $\gamma = 0$ -Ebene, so existieren nichtzusammenhängende marginale Kurven (vgl. rote Kurven in Abb. 3.15) und es entsteht eine 'Insel', innerhalb derer einzelne Moden wachstumsfähig sind. Dies ist ein neues, bislang noch unbekanntes Verhalten. Während auf der Stabilitätsfläche für TVF und 1-SPI nirgends lokale Maxima auftreten besitzt sie für L2-SPI ganz offensichtlich einen einzelnen Gipfel (vgl. Abb. 3.23).



# Kapitel 4

## Konvektive und absolute Instabilitätsschwellen

### 4.1 Charakterisierung der Stabilitätsbereiche

Bisher wurden Eigenschaften von Störungen direkt am kritischen Punkt  $(k_c, R_{1c})$  untersucht.,d.h. ebene Wellen mit unendlicher Ausdehnung (vgl. Abb. 4.1). Befindet sich das System nun aber im überkritischen Bereich, wird ein ganzes Wellenzahlband angeregt, so dass durch Superposition angeregter Moden eine räumlich lokalisierte Störung in Form eines Wellenpakets entstehen kann, was in Abb. 4.2 schematisch dargestellt ist. Dieses läßt sich mittels des Ansatzes (3.6) gut beschreiben.

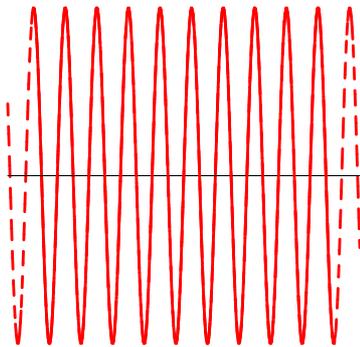


Abbildung 4.1: Unendlich ausgedehnte kritische Eigenmode.

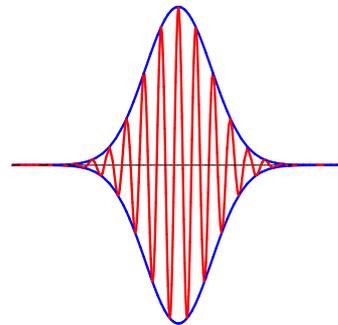


Abbildung 4.2: Räumlich beschränktes Wellenpaket als Superposition aller im überkritischen Fall angeregten Eigenmoden.

Der Schwerpunkt des Wellenpaketes bewegt sich mit der axialen Gruppengeschwindigkeit  $w_g$ , die eine Funktion des Durchflusses  $Re$  ist, wie in Abb. 3.2 und 3.3 für 1-SPI und

Abb. 3.4 und 3.5 für 2-SPI bereits gesehen. Im Gegensatz zur unendlich ausgedehnten Störung gibt es aufgrund der räumlichen Lokalisierung des Wellenpaketes die Möglichkeit, dass jede Störung trotz positiven Anwachsverhaltens ( $\gamma > 0$ , vgl. 1.12) durch die Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  von jedem beliebigen Ort des Systems wegtransportiert wird. Es ist somit wichtig, neben dem Wert von  $\gamma$ , wie bisher, auch noch dessen betragsmäßige Größe  $|\gamma|$  zu betrachten, was zur Unterscheidung der folgenden drei Fälle führt (Abb. 4.3):

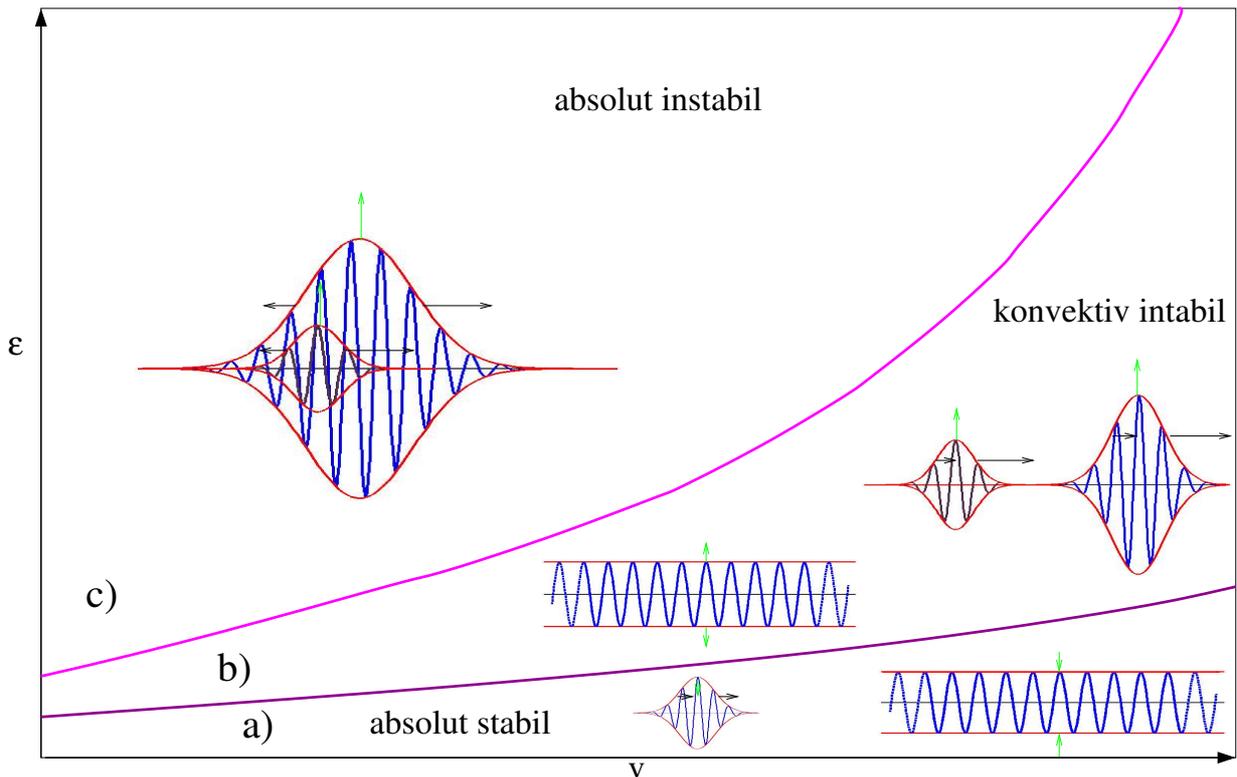


Abbildung 4.3: Zeitlicher Verlauf lokalisierter bzw. unendlich ausgedehnter Störungen mit den daraus resultierenden Stabilitätsbereichen; grüne Pfeile symbolisieren das Wachstumsverhalten der Amplituden; schwarze Pfeile stehen für die Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}$  im Fall des lokalisierten Wellenpaketes; Geschwindigkeit  $v$  von links nach rechts. Bereiche: a) **absolut stabil**, b) **konvektiv instabil**, c) **absolut instabil**

1.  $\gamma < 0$ : Jegliche Störung im System wird weggedämpft. Nach einer endlichen Zeit ist das System wieder in den Grundzustand zurückgekehrt. Der Grundzustand heißt für solche Parameter dann **absolut stabil** gegenüber Störungen (Abb. 4.3a). Dies gilt sowohl für den Fall einer unendlich ausgedehnten Welle, als auch für ein einzelnes lokalisiertes Wellenpaket (vgl. Abb. 4.1 und 4.2).

2.  $\gamma > 0$  Die Bewegung des gesamten Wellenpaketes mit  $w_g$  ist so groß, dass das Anwachsverhalten der Störung diese an einem bestimmten Punkt nicht kompensieren kann. Während die Amplitude des Schwerpunkts zwar kontinuierlich zunimmt, wandern beide Fronten des Wellenpaketes in die gleiche Richtung wie die Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  (Abb. 4.3b). Da es sich um eine lokale Störung handelt, stirbt diese folglich an jedem Ort des Systems nach einer endlichen Zeit aus und selbiges kehrt in seinen Grundzustand zurück. Entscheidend hierbei ist, dass es sich um ein einzelnes, lokalisiertes Wellenpaket handelt, da ein Wachstum der Amplitude bei unendlich ausgedehnten Störungen somit das gesamte System erfüllt. Es ist hierbei wichtig auf die Wahl des jeweiligen Bezugssystems zu achten. Im Laborsystem ist in diesem Fall eine vorbeilaufende Konvektionsstruktur erkennbar, die aber sobald die Systemgrenzen überschritten sind wieder verschwindet. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als **konvektiv instabil**.
3.  $\gamma > 0$  und groß genug, um Störungen an jedem beliebigen Ort des Systems anwachsen zu lassen, unabhängig von der Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  mit der der Schwerpunkt des Paketes fortbewegt wird (Abb. 4.3c). Dies bedeutet, dass die Fronten des Paketes im mitbewegten Bezugssystem in entgegengesetzte Richtungen propagieren, die zugehörigen Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}$  somit unterschiedliche Vorzeichen besitzen und der Systemgrundzustand im gesamten System nach endlicher Zeit ausstirbt. Dieser Zustand wird demzufolge als **absolut instabil** bezeichnet.

Es sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass bei der Definition der Begriffe absoluter und konvektiver Instabilität die Wahl des Bezugssystems von entscheidender Bedeutung ist. Befindet man sich nämlich gerade im Schwerpunktsystem, fallen konvektive und absolute Instabilität zusammen.

## 4.2 Lineare Analyse lokalisierter Störungen

Im Folgenden sei  $\vec{X}(z, t)$  ein lokalisiertes Störwellenpaket im Ortsraum, entstanden knapp oberhalb des kritischen Punkts. Als Wellenzahlspektrum für reelle  $k$  ergibt sich (der Einfachheit halber wird als räumliche Koordinate  $\vec{x}$  nur die Richtung der Strukturbildung  $z$  betrachtet):

$$\vec{X}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \vec{X}(k, t) e^{ikz} \quad (4.1)$$

$$(3.1, 3.6, 3.10) \implies \vec{X}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \vec{X}(k, t=0) e^{ikz + \sigma(k)t} \quad (4.2)$$

Somit sind die entscheidenden Größen für das Wachstumsverhalten der Störung gegeben durch:

1. den Eigenwert  $\sigma(k)$

2. den Anfangszustand  $\vec{X}(k, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \vec{X}(z, t = 0) e^{-ikz}$

Interessant ist nun das Langzeitverhalten eines solchen Wellenpaketes im mitbewegten Bezugssystem und insbesondere im Laborsystem. Die Idee hierbei besteht darin mittels *Gauss'scher Ergänzung* ( $z = vt$ ) die axiale Koordinate  $z$  mit in den Eigenwert einzubeziehen.

$$\vec{X}(z = vt, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \vec{X}(k, t = 0) e^{\Sigma(k)t}, \quad \text{wobei} \quad \Sigma(k) := \sigma + ikw \quad (4.3)$$

Somit ist  $\Sigma(k) := \sigma + ikw$  der neue Eigenwert, in dem mit der Geschwindigkeit  $v$  mitbewegten Bezugssystem. Dieses Integral läßt sich im Limes  $t \rightarrow \infty$  näherungsweise unter Zuhilfenahme der Sattelpunktmethode [Anhang] berechnen. Somit ergibt sich für das Langzeitverhalten

$$\vec{X}(z = wt, t)|_{t \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\Sigma(Q_s)t} \int_{C'} dQ \vec{X}(Q, t = 0) \quad (4.4)$$

mit der i.A. komplexen Wellenzahl

$$Q = k - iK \quad (4.5)$$

( $k$  :=reelle axiale Wellenzahl,  $K$  :=axiale Wachstumsfate,  $C'$  :=Integrationsweg im Komplexen)

Das verbleibende Integral auf der rechten Seite in (4.4) besitzt einen konstanten Wert, so dass es im Langzeitverhalten genügt  $\Sigma(Q_s)$  zu untersuchen<sup>1</sup>. Dabei erhält man  $Q_s$  aus der folgenden Sattelpunktsbedingung (hier unter der Annahme, dass nur ein Sattelpunkt existiert):

$$\left. \frac{\partial \Sigma(Q)}{\partial Q} \right|_{Q_s, \mu_c} = \left. \frac{\partial \Sigma(\sigma + iQw)}{\partial Q} \right|_{Q_s, \mu_c} = 0 \quad (4.6)$$

Verantwortlich für das Wachstumsverhalten der Störung ist der Realteil  $Re[\Sigma(Q_s)]$ . Für  $Re[\Sigma(Q_s)] > 0$  ist die Störung im mitbewegten Bezugssystem wachstumsfähig. Im umgekehrten Fall  $Re[\Sigma(Q_s)] < 0$  wird die Störung weggedämpft, so dass durch

$$Re[\Sigma(Q_s)]|_{\mu_c} = 0 \quad (4.7)$$

die Schwelle  $\mu_c$  zwischen absoluter Stabilität und konvektiv instabilem Verhalten liegt. Um nun analog die Schwelle zwischen absoluter- und konvektiver Instabilität  $\mu_{c-a}$  zu bestimmen muss man sich ins Laborsystem ( $w = 0$ ) begeben und dort die Wachstumsschwelle der Störung bestimmen. Dazu wird eine Front des Störwellenpaketes im Laborsystem fixiert, so dass sich in diesem Fall folgende Sattelpunktsbedingung analog zu (4.6) ergibt:

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial Q} \right|_{Q_s, \mu_{c-a}} = 0 \quad (4.8)$$

<sup>1</sup>Der Index s dient von nun an der Kennzeichnung des Sattelpunktes  $Q_s = k_s - iK_s$  in der komplexen (k,K) Ebene.

### 4.3. BERECHNUNG DER GRENZE ZWISCHEN ABSOLUTER UND KONVEKTIVER INSTABILITÄT

Auch hierbei legt wiederum der Realteil

$$\operatorname{Re}[\sigma(Q_s)]|_{\mu_{c-a}} = 0 \quad (4.9)$$

die Grenze des Anwachsverhaltens fest. Hieraus resultieren drei Bereiche (Tab. 4.1), in die sich der Parameterraum unterteilen läßt.

Verhalten bzgl. Störungen	zugehöriger Parameterbereich
absolut stabil	$\mu < 0$
konvektiv instabil	$0 < \mu < \mu_{c-a}$
absolut instabil	$\mu > \mu_{c-a}$

Tabelle 4.1: Einteilung des Parameterraums nach den unterschiedlichen Stabilitätskriterien.  $\mu_{c-a}(Re) = \frac{R_{1c-a}(Re)}{R_{1c}(Re)} - 1$

Wie bereits in Abschnitt 2.3.4 durchgeführt, werden die jeweiligen Stabilitätsgrenzen noch bzgl.  $R_{1c}(Re = 0)$  = 'kritischer Wert ohne Durchfluss' normiert.

$$\epsilon_x(Re) = \frac{R_{1x}(Re)}{R_{1c}(Re = 0)} - 1 \quad (4.10)$$

$$\iff \epsilon_x(Re) = \mu_x(Re)[1 + \epsilon_c(Re)] + \epsilon_c(Re) \quad (4.11)$$

(wobei  $x = c$  oder  $x = c - a$ )

### 4.3 Berechnung der Grenze zwischen absoluter und konvektiver Instabilität

Eine ebenso einfach wie schnelle Möglichkeit um zwischen absoluter und konvektiver Instabilität unterscheiden zu können, beruht auf der Dispersionsrelation  $\omega(k)$  des Systems. Diese läßt sich approximativ aus der schon beschriebenen linearen Amplitudengleichung (3.5) gewinnen. Dabei sei nochmals angemerkt, dass diese nur in hinreichender Nähe der kritischen Werte  $k \approx k_c$  und  $\mu \approx \mu_c$  gilt. Ausgehend von Gleichung (3.11) und unter Verwendung von  $Q$ .

$$\sigma(\mu, Q) = -\sigma_A = -i(Q - k_c)w_g + (1 + ic_0)\frac{\mu}{\tau_0} - (1 + ic_1)\frac{\xi_0^2}{\tau_0}(Q - k_c)^2 - i\omega_c \quad (4.12)$$

erhält man unter Ausnutzung der Sattelpunktsbedingung (4.6):

$$0 = \left. \frac{\partial \Sigma(Q)}{\partial Q} \right|_{Q_s} = \left. \frac{\xi_0^2}{\tau_0}(Q - k_c) \right|_{Q_s} \quad (4.13)$$

Nach Auflösung und Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt sich für den Sattelpunkt:

$$Q_s = k_c - \frac{\tau_0 c_1 w_g}{2(1+c_1^2)\xi_0^2} - i \frac{\tau_0 w_g}{2(1+c_1^2)\xi_0^2} \quad (4.14)$$

$$= \underbrace{k_c}_{k_s} - i \underbrace{\frac{\tau_0 w_g}{2(1+c_1^2)\xi_0^2}}_{K_s} \quad (4.15)$$

Setzt man den so ermittelten Sattelpunkt (4.15) nun in die allgemeine Schwellenbedingung (4.8)  $\frac{\partial \sigma}{\partial Q}|_{Q_s, \mu_{c-a}} = 0$  ein, findet man nach einfacher aber etwas umständlicher Rechnung folgende Bedingung für die Schwelle:

$$\mu_{c-a} = \frac{\tau_0^2 w_g^2}{4(1+c_1^2)\xi_0^2} \quad (4.16)$$

Hieraus ergibt sich mit der Normierung (4.10) analog zu (4.11):

$$\epsilon_{c-a}(Re) = \frac{\tau_0^2 w_g^2}{4(1+c_1^2)\xi_0^2} [1 + \epsilon_c(Re)] + \epsilon_c(Re) \quad (4.17)$$

Bei dieser Methode, die Schwelle zwischen absoluter- und konvektiver Instabilität zu berechnen, besteht der Vorteil eindeutig darin, dass lediglich die Kenntnis der linearen Koeffizienten (Abb. 3.3-3.14) der Amplitudengleichungen notwendig ist. Der Nachteil ist jedoch, wie anfangs beschrieben, dass deren Gültigkeit auf einen kleinen Bereich in der Nähe der kritischen Werte  $\mu_c$  und  $k_c$  beschränkt ist. Deutliche Abweichungen zu anders ermittelten Ergebnissen sind also insbesondere in den Bereichen zu erwarten, in denen die beiden Schwelle  $\mu_c$  und  $\mu_{c-a}$  weit auseinander liegen.

Ein sehr wichtiger Tatbestand ist, dass die bei dieser Berechnungsvorschrift zugrunde gelegte Dispersionsrelation der linearen Amplitudengleichung (3.5) ein bzgl. der Wellenzahl  $k$  nur quadratisches Polynom darstellt. Dies bedingt, dass mit dieser Methode höchstens ein Sattelpunkt existieren kann. Für die Existenz eines weiteren, also zweiten Sattels ist mindestens ein Polynom dritten Grades erforderlich. Dies wird im Folgenden noch von entscheidender Bedeutung sein.

Eine andere und exaktere Möglichkeit besteht in der numerischen Berechnung der Dispersionsrelation  $\sigma(Q)$  aus den vollen linearisierten Navier-Stokes Gleichungen mittels der Lösbarkeitsbedingung (2.33). Hierzu müssen aber auch die Wachstumsschwelle, sowie die Sattelpunktsbedingung (4.6) auf numerischem Wege bestimmt werden. Unter Zuhilfenahme der Cauchy-Riemann-Gleichungen ergibt sich aus :

$$Re[\sigma(Q_s)]|_{\mu_{c-a}} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\gamma(Q_s)}{K_s} \Big|_{\mu_{c-a}} = \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial K} \Big|_{Q_s, \mu_{c-a}} = \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial k} \Big|_{Q_s, \mu_{c-a}} = 0 \quad (4.19)$$

Somit reduziert sich das Problem auf ein Nullstellenproblem, bei dem die Nullstelle  $(k_s, K_s, \mu_{c-a})$  der Funktion

$$F(k, K, \mu) := \begin{pmatrix} \gamma(Q) \\ \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial K} \\ \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial K} \\ \frac{\partial}{\partial k} \end{pmatrix} \gamma(Q) \quad (4.20)$$

zu ermitteln ist. Numerisch kann dies z.B. mittels *Newton-Raphson-Verfahren* [Anhang] durchgeführt werden. Interessant ist hierbei (vgl. 4.18-4.20), dass der auf der  $(k, K, R_1)$  Fläche gesuchte Sattelpunkt auch gleichzeitig einen Sattelpunkt auf der  $(\gamma(k, K) = 0)$ -Isofläche darstellt (vgl. (4.20)).

Im Gegensatz zum ersten Verfahren besitzen die hier bestimmten Schwellen ihre Gültigkeit auch noch außerhalb des Bereiches  $k \approx k_c$  und  $\mu \approx \mu_c$ . Dieser gestiegene Komfort an Genauigkeit über einen größeren Bereich wird jedoch durch einen deutlich höheren Rechenaufwand erkaufte. Im Gegensatz zur Berechnung der Schwelle mittels der Dispersionsrelation  $\omega(k)$  können hiermit aber auch mehrere Sattelpunkte ermittelt werden.

## 4.4 Wachstumsschwellen von L2-SPI Strukturen

Mittels der numerischen Verfahren des vorangegangenen Abschnitts soll nun das Verhalten von L2-SPI im Bezug Nachdem in Abschnitt 3.1.4 gesehenen Verhalten der linearen Koeffizienten in Abhängigkeit von  $Re$ , insbesondere der dabei aufgetretenen Sprünge (Abb. 3.10-3.14), läßt sich bereits hier vermuten, dass die Variante 1 weitere Probleme mit sich führt. Desweiteren werden die vollen Linearen Gleichungen (2.22) zur Lösung herangezogen, da diese auch entfernt vom Einsatzpunkt ihre Gültigkeit besitzen. Wie zuvor beschrieben erhält man als Resultat dieser Überlegung zunächst den komplexen Sattelpunkt  $Q_s = k_s - iK_s$  und daraus nun die gesuchte Wachstumsschwelle  $\mu_{c-a}$ . Wie sich noch zeigen wird, ist es gerade dieser Sattel im Fall von L2-SPI, der entscheidend von den Parametern  $\eta, R_2$  und  $Re$  beeinflusst wird.

Die so erhaltenen reduzierten Stabilitätsgrenzen  $\epsilon_x$  ( $x = 'c'$  oder  $'c - a'$ ) sind in den folgenden Abb. 4.4 - 4.7 für  $\eta = 0.7$  und  $0 \leq Re \leq 20$ , sowie für  $\eta = 0.5$  und  $-20 \leq Re \leq 20$ , jeweils für unterschiedliche  $R_2$  dargestellt. Zum besseren Vergleich der verschiedenen Kurven wurden diese auf die kritischen Werte  $R_{1c}(Re = 0)$  bei verschwindendem Durchfluss normiert. Zu sehen sind der Reihenfolge nach (von unten nach oben) die Schwelle zwischen *absolut stabilem Verhalten* und *konvektiver Instabilität*  $\epsilon_c(Re)$  (schwarz), sowie der Übergang von *konvektiver* zu *absoluter Instabilität*  $\epsilon_{c-a}(Re)$ . Für letzteren Fall sind sowohl die Ergebnisse bzgl. der GLN (rot), als auch aus den vollen Linearen Gleichungen (grün) eingetragen. Die gewonnenen Schwellen für  $\eta = 0.7$  dienen sowohl zur Kontrolle des Codes, als auch als Referenzen. Wie sich nämlich zeigen wird, führt unter Anderem eine Abnahme des Radienverhältnisses hin zu  $\eta = 0.5$ , zu einem bis dahin nicht beobachtetes Verhalten der Wachstumsschwellen  $\epsilon_{c-a}(Re)$ . Es treten geschlossene Kurven auf.

In Abbildung 4.4 wurden die unterschiedlichen Bereiche im Fall  $R_2 = 0$  noch einmal explizitmarkiert. Unterhalb der Stabilitätskurve  $\epsilon_c(Re)$  (schwarz) ist der Grundzustand absolut stabil. Darüber ist er im Bereich  $\epsilon_c < \epsilon < \epsilon_{c-a}$  konvektiv instabil, oberhalb  $\epsilon_{c-a}(Re)$  (rot, grün) ist das System absolut instabil.

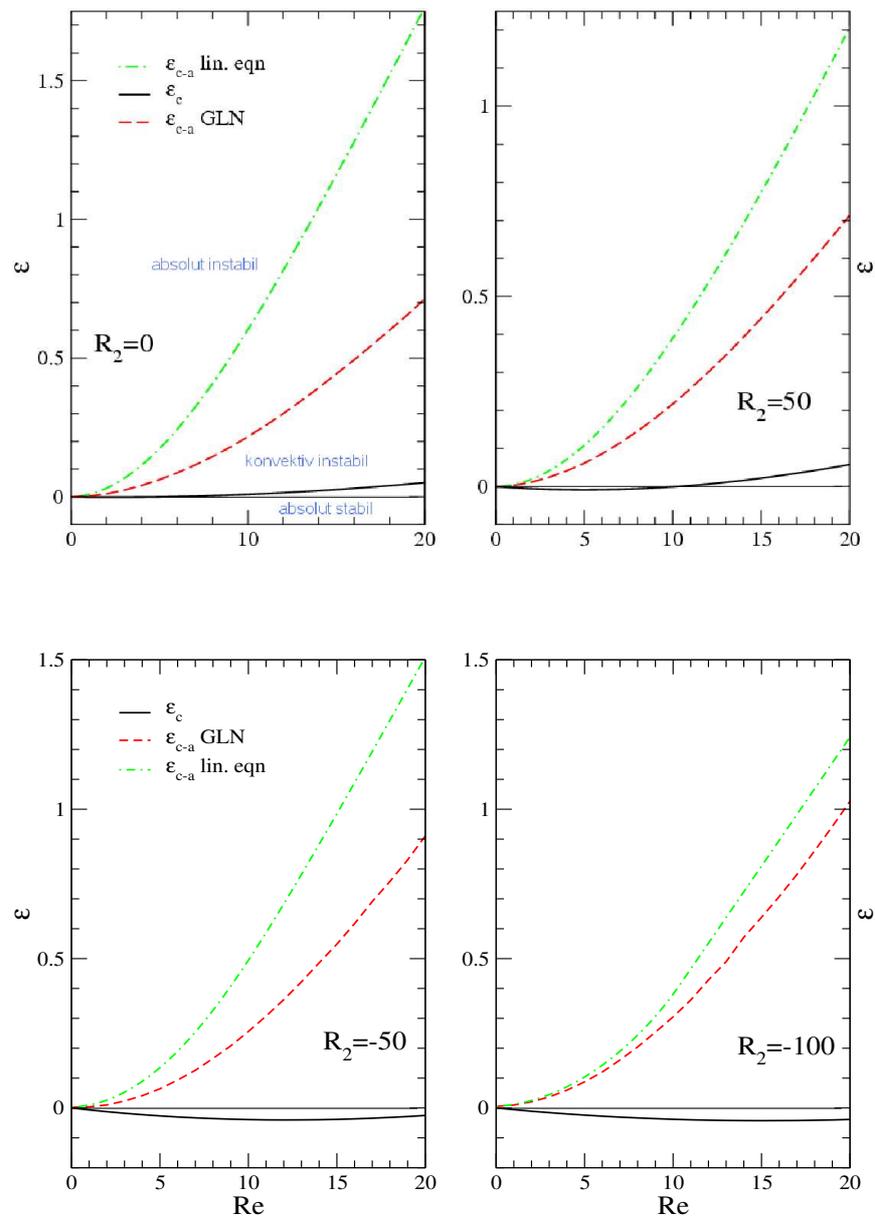


Abbildung 4.4: L2-SPI: Wachstumsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  und  $\epsilon_{c-a}(Re)$  als Funktion von  $Re$ . rot: Ginzburg-Landau-Näherung; grün: lineare Gleichungen;  $\eta = 0.7$ .

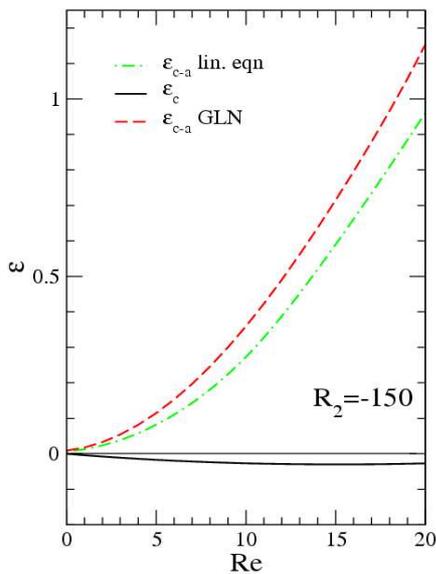


Abbildung 4.5: L2-SPI: Wachstumsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  und  $\epsilon_{c-a}(Re)$  als Funktion von  $Re$ . rot: *Ginzburg-Landau-Näherung*; grün: *lineare Gleichungen*;  $\eta = 0.7$ .

Betrachtet man die Abb. 4.4 - 4.7, so fällt zum einen auf, dass sich die Stabilitätsschwellen  $\epsilon_c(Re)$ ,  $\epsilon_{c-a}(Re)$  bei gleichem  $R_2$  und Verkleinerung von  $\eta = 0.7$  nach  $\eta = 0.5$  doch deutlich nach unten, also zu kleineren  $\epsilon$  Werten und somit näher an die kritischen Werte verschieben. So liegen z.B. die Schwellenwerte bei  $R_2 = -50$  bei  $\eta = 0.7$  für absolute Stabilität bei  $\epsilon_c(Re = 20) \approx -0.01$  und  $\epsilon_{c-a}(Re = 20) \approx 0.9$  (*GLN*)  $\approx 1.5$  (*NSE*), gegenüber entsprechenden Werten  $\epsilon_c(Re = 20) \approx -0.22$  und  $\epsilon_{c-a}(Re = 20) \approx 0.2$  (*GLN*)  $\approx 1.3$  (*NSE*) bei  $\eta = 0.5$ . Dies zeigt auch gleich eine weitere Auffälligkeit, dass die Schwelle  $\epsilon_c$  bei  $\eta = 0.5$  für  $Re > 0$  doch recht deutlich zu negativen Werten hin verschoben wird.

Eine weitere starke Abhängigkeit mit dem Radienverhältnis zeigt das jeweils verwendete Verfahren zur Berechnung des konvektiv-instabilen Übergangs. Während für den Fall  $\eta = 0.7$  die unterschiedlichen Lösungen noch einigermaßen übereinstimmen, so kommt es bei  $\eta = 0.5$  doch zu sehr drastischen Unterschieden, die sich mit Abnahme der Gegenrotation  $R_2$  zunehmend verstärken. Am ersichtlichsten ist dies in Abb. 4.6 bei den beiden Gegenrotationszahlen  $R_2 = 0$  und  $R_2 = 50$ . Hier stellt die anhand der linearen Gleichungen gewonnene Lösung  $\epsilon_{c-a}(Re)$  für  $R_2 = 0$  eine **geschlossene Kurve** dar. Hierauf wird in den folgenden Abschnitten 4.5 und 4.6 im Einzelnen noch ausführlich eingegangen werden. Noch extremer ist der Unterschied sogar bei  $R_2 = 50$ , da bei diesem Parametersatz aus den vollen linearen Gleichungen keine Lösung zu ermitteln war. Dies bedeutet, dass sich das System demzufolge, nach Überschreitung der konvektiven Stabilitätsschwelle, permanent im konvektiv-instabilen Zustand befindet. Es scheint als sei die *Ginzburg – Landau – Näherung* in diesem Bereich ungeeignet eine Aussage über die Stabilitätsschwellen  $\epsilon_{c-a}(Re)$  zu treffen.

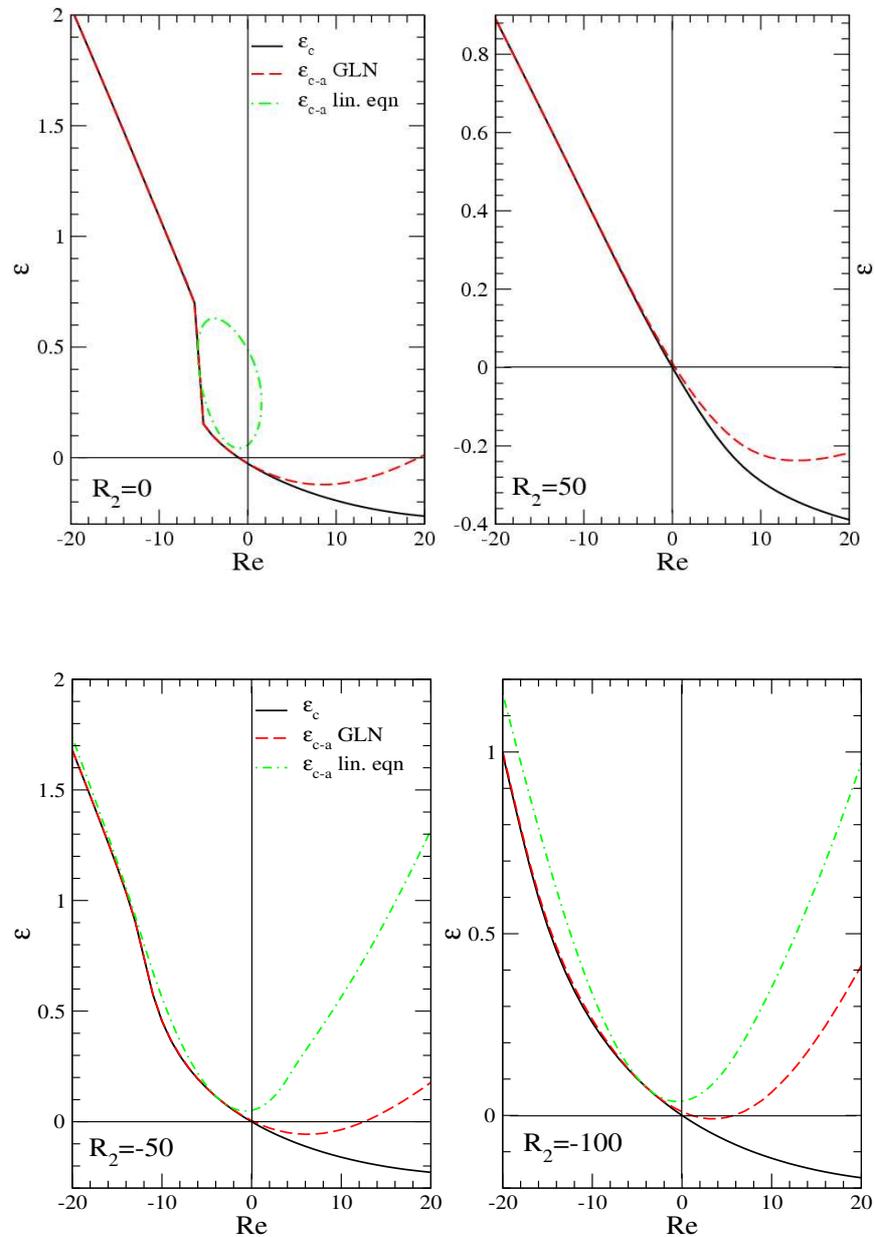


Abbildung 4.6:  $M = 2$  SPI: Wachstumsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  und  $\epsilon_{c-a}(Re)$  als Funktion von  $Re$ . rot: *Ginzburg-Landau-Näherung*; grün: *lineare Gleichungen*;  $\eta = 0.5$ ; Man beachte besonders die Graphen zu  $R_2 = 0$  und  $R_2 = 50$ , in denen die Lösung  $\epsilon_{c-a}(Re)$  der linearen Gleichung eine geschlossene Kurve darstellt, bzw. überhaupt nicht existiert. Dies liegt in der aus Abschnitt 3.2, Abb. 3.18 bereitst bekannten Aufspaltung der marginalen Kurven.

Der in Abb. 4.6 für  $R_2 = 0$  und  $Re \approx -6$  gut zu erkennende Sprung in der konvektiven Stabilitätsschwelle  $\epsilon_c(Re)$ , sowie die mittels GLN gewonnene konvektiv-instabile Stabilitätsschwelle  $\epsilon_{c-a}(Re)$  ist unmittelbar auf die aus Abschnitt 3.2, Abb. 3.18 bereits bekannten Aufspaltung der marginalen Kurven zurückzuführen. Denn abhängig vom Auftreten von 'Inseln', innerhalb derer einige Moden wachstumsfähig sind, werden verschiedene Sättel an verschiedenen marginalen Kurven ermittelt. Für den Fall, dass eine Insel vorhanden ist, handelt es sich hierbei um Sättel bei Wellenzahlen  $3.4 \leq k \leq 3.7$ . Liegt der 'Berg' jedoch unterhalb der  $\gamma = 0$  Ebene, so dass eine Insel mit wachstumsfähigen Moden auftritt, erfolgt die Sattelpunktsanalyse für deutlich größere Wellenzahlen  $4.5 \leq k \leq 5.5$ .

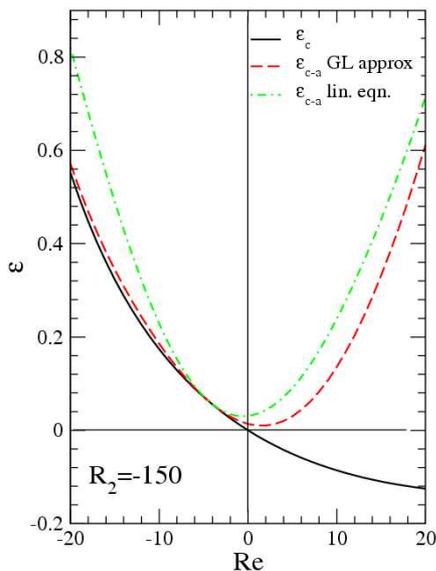


Abbildung 4.7: L2-SPI: Wachstumsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  und  $\epsilon_{c-a}(Re)$  als Funktion von  $Re$ . rot: *Ginzburg-Landau-Näherung*; grün: *lineare Gleichungen*;  $\eta = 0.5$ .

Um dieses neu gefundene Verhalten der konvektiv-instabilen Stabilitätsschwelle bei Veränderung von  $\eta$  nochmals gesondert darzustellen, sind diese in Abb. 4.8 im Bereich  $-5 \leq Re \leq 10$  einander gegenübergestellt und unterschiedliche Stabilitätsbereiche mittels Farben kodiert. Während im rechten Graphen ( $\eta = 0.7$ ) die gewohnte Reihenfolge der Stabilitätsgrenzen bzgl. TVF und 1-SPI, von absolut (1) über konvektiv-instabil (2) hin zu absolut instabil (3) lautet, so erkennt man im linken Graph ( $\eta = 0.5$ ) einen Bereich, abhängig von  $Re$ , für den dieses so nicht mehr gilt. Hier kehrt das System bei Durchflüssen  $-5 \leq Re \leq 2$  erneut von absolut instabilen zu konvektiv-instabilen Verhalten zurück. Die konvektiv instabile Region (2) ist somit zweigeteilt, in einen Bereich (2a), in dem das System durchweg in diesem Zustand verharrt und nie zu absoluter Instabilität gelangt (Zumindest in dem hier untersuchten überkritischen Bereich bis  $\mu = 7$ ). Weiterhin gibt es aber auch Gebiete (2b), in dem nun das System nach absoluter Instabilität (3) in einen konvektiv instabilen Zustand zurückkehrt und dann in diesem verbleibt.

Die in den Abb. 4.4-4.7 dargestellten Stabilitätsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  und  $\epsilon_{c-a}(Re)$  der GLN wurden weiterhin mittels eines Polynoms 6-ten Grades

$$\epsilon_x(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4 + a_5 Re^5 + a_6 Re^6$$

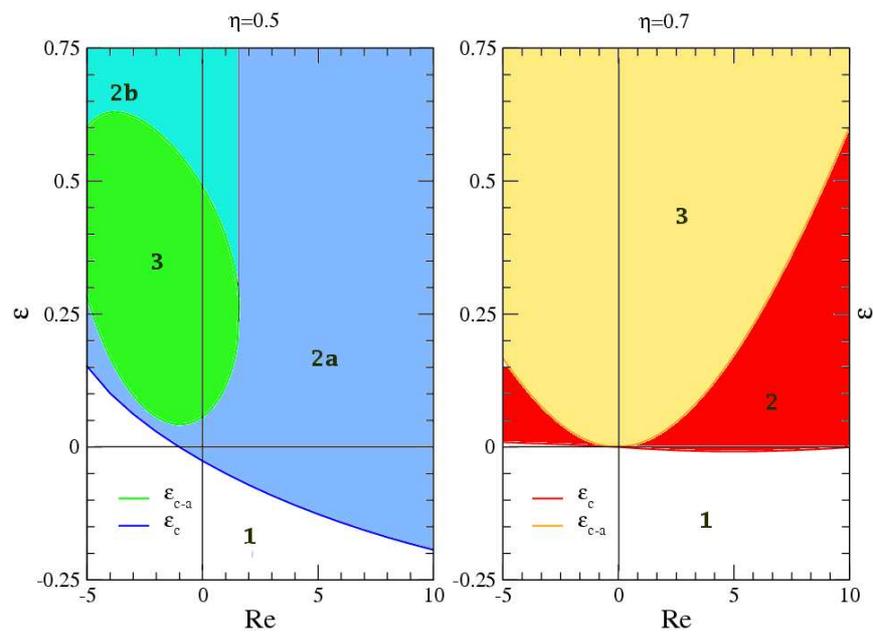


Abbildung 4.8: L2-SPI: Vergleich der Wachstumsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  und  $\epsilon_{c-a}(Re)$  als Funktion von  $Re$  mit den unterschiedlichen Stabilitätsbereichen: 1: absolut stabil, 2: konvektiv-instabil, 3: absolut instabil; links:  $\eta = 0.5$ , rechts:  $\eta = 0.7$

( $x = c'$  oder  $x = c - a'$ ), für die unterschiedlichen  $R_2$ , angefügt und die Ergebnisse in den Tabellen 4.2 und 4.3 für die beiden Radienverhältnisse  $\eta = 0.7$ , sowie  $\eta = 0.5$  zusammengestellt. Bei letzterem Radienverhältnis sei nochmals ausdrücklich auf den Gültigkeitsbereich der ermittelten Fitparameter verwiesen. Dieser erstreckt sich, von positiven  $Re$  kommend bis hin zu der in den linearen Koeffizienten aufgetretenen Sprungstelle in Abb. 3.10-3.14.

$\epsilon_c(Re) = a_0 + a_1Re + a_2Re^2 + a_3Re^3 + a_4Re^4 + a_5Re^5 + a_6Re^6$					
$R_2$	50	0	-50	-100	-150
$a_0 * 10^9$	1.382	-25.9122	-0.6868	-3.7610	-4.6105
$a_1 * 10^3$	-0.8379	-3.3531	-6.7119	-5.7655	-4.1631
$a_2 * 10^4$	1.7962	3.4200	2.9160	2.0603	1.5659
$a_3 * 10^7$	-3.3833	-7.0225	-6.8819	-5.8528	-7.3701
$a_4 * 10^8$	-0.6052	-5.1373	-1.1455	-0.6672	-0.8477
$a_5 * 10^{10}$	0.4256	6.5823	-0.1910	0.9055	3.1572
$a_6 * 10^{13}$	-0.2276	4.5777	18.303	-3.0283	-29.52832

$\epsilon_{c-a}(Re) = a_0 + a_1Re + a_2Re^2 + a_3Re^3 + a_4Re^4 + a_5Re^5 + a_6Re^6$					
$R_2$	50	0	-50	-100	-150
$a_0 * 10^3$	0.3522	163.202	2.7783	5.8696	8.95207
$a_1 * 10^3$	-1.3038	47.9965	-3.1695	-1.4909	4.7055
$a_2 * 10^3$	3.9221	-6.0136	3.8404	5.2404	3.9482
$a_3 * 10^4$	-3.6183	1.6845	-2.2988	-5.5690	-2.12439
$a_4 * 10^5$	3.1485	-1.5608	2.1941	5.8813	2.1115
$a_5 * 10^6$	-1.3901	6.6202	-1.08365	-2.9317	-1.1167
$a_6 * 10^8$	2.3065	-10.6608	1.9224	5.2839	2.1338

Tabelle 4.2: Fitparameter der beiden Instabilitätsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  und  $\epsilon_{c-a}(Re)$ , gewonnen aus der  $GLN$ , bzgl.  $m = 2$  Mode einer L2-SPI für unterschiedliche  $R_2$ ;  $\eta = 0.7$ . Die entsprechenden Werte der R2-SPI lassen sich mit der zugehörigen Symmetrietabelle (3.2) wie bereits bei den 'geraden' linearen Koeffizienten gesehen ermitteln.

$$\epsilon_c(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4 + a_5 Re^5 + a_6 Re^6$$

$R_2$	-150	-100	-50	0	50
$a_0 * 10^6$	-0.1013	-0.9503	-2.1909	-8.0625	-307.269
$a_1 * 10^2$	-1.2001	-1.6640	-2.3561	-2.5289	-3.6980
$a_2 * 10^4$	4.1686	6.1550	10.2397	11.4977	-7.2401
$a_3 * 10^5$	-0.9032	-1.6718	-38182	-5.2166	29.6214
$a_4 * 10^6$	-0.1760	0.4580	1.4135	2.4703	-18.7740
$a_5 * 10^8$	-0.2981	-0.9713	-3.5883	-7.4367	47.8835
$a_6 * 10^{10}$	0.2939	1.0291	4.1729	9.6165	-40.1943

$$\epsilon_{c-a}(Re) = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 + a_3 Re^3 + a_4 Re^4 + a_5 Re^5 + a_6 Re^6$$

$R_2$	-150	-100	-50	0	50
$a_0 * 10^3$	13.6188	9.5354	5.1755	1.9139	10.5681
$a_1 * 10^2$	-0.4776	-1.0105	-2.0386	-2.4082	-3.6393
$a_2 * 10^3$	1.4125	1.1802	1.8671	1.6254	1.2024
$a_3 * 10^5$	5.8979	9.4144	-5.1743	-2.1761	-2.9271
$a_4 * 10^6$	-4.6142	-7.7908	4.9962	0.9005	8.7224
$a_5 * 10^7$	1.9114	2.9308	-2.6856	-0.4139	-5.8610
$a_6 * 10^9$	-3.3873	-4.7621	4.8035	0.5125	11.4424

Tabelle 4.3: Fitparameter der beiden Instabilitätsschwellen  $\epsilon_c(Re)$  und  $\epsilon_{c-a}(Re)$ , gewonnen aus der *GLN*, bzgl.  $m = 2$  Mode einer L2-SPI für unterschiedliche  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$ . Die entsprechenden Werte der R2-SPI lassen sich mit der zugehörigen Symmetrietabelle (3.2) wie bereits bei den 'geraden' linearen Koeffizienten gesehen ermitteln. Die Gültigkeit dieser Fitparameter gilt nur, von positiven Durchflüssen  $Re$  kommend, bis zu der jeweils sichtbaren Sprungstelle in den linearen Koeffizienten (vgl. Abb. 3.10- 3.14).

## 4.5 Parameterabhängigkeit der Wachstumsschwellen

Wie im vorherigen Abschnitt bereits gesehen zeigen die Wachstumsschwellen u.a. eine starke Variation bzgl. des Radienverhältnisses  $\eta$ .

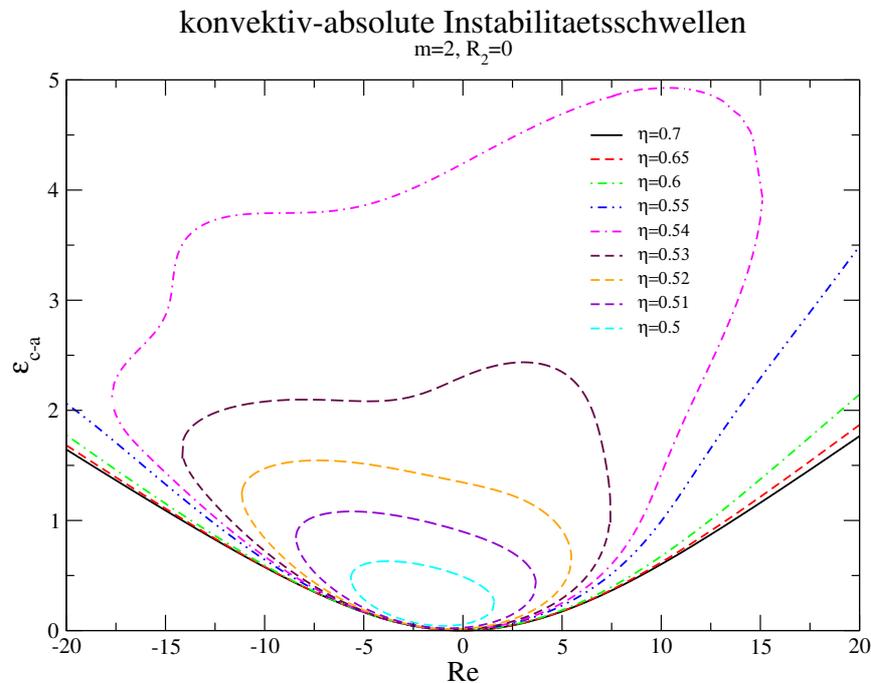


Abbildung 4.9: Konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen  $\epsilon_{c-a}(Re)$  einer L2-SPI als Funktion von  $Re$  bei Variation von  $\eta$ ; Kontrollparameter:  $R_2 = 0$

Neben dieser konnten noch weitere Einflüsse, z.B. durch  $R_2$  und  $Re$  festgestellt werden. Diese sollen nun im einzelnen näher untersucht werden. Hierzu will ich mich auf die Lösungen, die aus den vollen linearen Gleichungen gewonnen wurden beschränken, da diese ihre Gültigkeit auch fernab der kritischen Werte beibehalten. Wie in Abb. 4.6 gesehen versagt die Ginzburg-Landau-Näherung im Fall der L2-SPI, bei gewissen Parametersätzen, offensichtlich versagt. Die Ergebnisse bzgl.  $\eta$  und  $R_2$  Variation sind in den Abb. 4.9 und 4.10 zu sehen. In diesen stellen die *konvektiv-instabilen* Schwellen, wie schon in Abb. 4.6 zu erkennen war, zum Teil **geschlossene Kurven** bzgl.  $Re$  und  $\epsilon_{c-a}$  der kritischen Werte  $R_{1c}$  dar. Dies bedeutet, dass es sich in einigen Fällen bei den absolut instabilen- um eingeschlossene Regionen handelt. Der nun Folgenden Teil sich zuerst auf eben gerade diese geschlossenen Kurven der Lösung beschränken. Zur genaueren Betrachtung und Erklärung der Aufspaltung dieser Kurven (Abb. 4.10) und vorallem die Aussagekraft der oberen Schwelle sei an dieser Stelle auf den folgenden Abschnitt 4.6 verwiesen. Dort soll diese doch sehr 'kuriose' Aufspaltung in zwei Lösungen anhand der zugehörigen Sattelpunkt genau untersucht

werden. Aus Abb. 4.9 geht hervor, dass sich mit Abnahme von  $\eta$  auch der  $Re$  Bereich, in dem diese geschlossenen Kurven liegen, verkleinert. So reicht er z.B. bei  $\eta = 0.54$  noch von  $-17 \leq Re \leq 15$ , während er sich bei  $\eta = 0.5$  gerade noch von  $-6 \leq Re \leq 3$  erstreckt. Weitere Rechnungen zu noch kleineren  $\eta$  ergaben ein völliges Verschwinden der geschlossenen Kurven und demzufolge des Bereiches absoluter Instabilität, wie bereits in Abb. 4.6 für  $R_2 = 50$  gesehen.

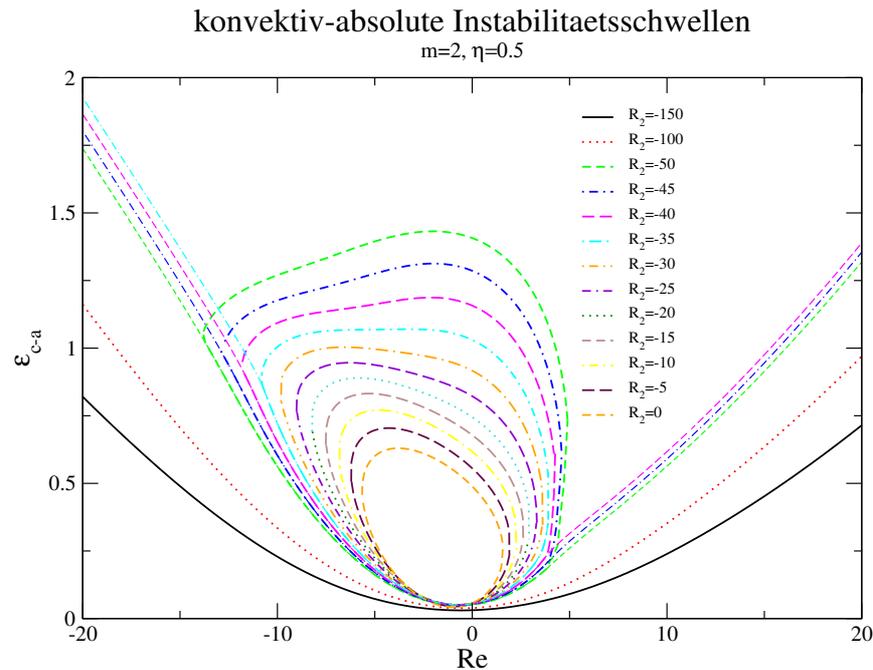


Abbildung 4.10: Konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen  $\epsilon_{c-a}(Re)$  einer L2-SPI als Funktion von  $Re$  bei Variation von  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$

Interessanter als die  $Re$  Abhängigkeit ist jedoch die ebenfalls mit der Abnahme von  $\eta$  verknüpfte Verminderung der Überkritischen Werte, bei der das System die konvektiv-instabile Schwelle zum zweiten Mal durchbricht, nun aber in umgekehrter Richtung, d.h. von absolut zu konvektiv-instabil. So z.B. liegt dieser Wert (für  $Re = 0$ ) bei  $\eta = 0.54$  (magenta) etwa bei  $\epsilon_{c-a} \approx 4.1$  was soviel heißt, als dass man sich  $\approx 410\%$ , also sehr weit überkritisch befindet. Ganz anders sieht es bei  $\eta = 0.5$  (cyan) aus: Hier befindet man sich mit einem Wert von  $\epsilon_{c-a} \approx 0.4$  lediglich  $\approx 40\%$  oberhalb des kritischen Wertes. Mit zunehmendem  $\eta$  scheint das Gebiet mit absoluter Instabilität zunehmend größer und auch komplizierter zu werden. Es hat den Anschein, als würden die Ränder mit wachsendem  $\eta$  weiter 'ausfransen'. Analog zur Abhängigkeit von  $\eta$  ist die Region absoluter Instabilität auch mit der Rotationszahl  $R_2$  des äußeren Zylinders verknüpft, wie in Abb. 4.10 zu sehen. Eine betragsmäßige Abnahme von  $R_2$  hat hierbei die gleiche Konsequenz, wie die zuvor

beschriebene Änderung der geschlossenen Bereiche bei Verkleinerung von  $\eta$ . Auch hier ist zu erkennen, dass für  $R_2 > 0$  die Regionen völlig verschwinden, was bereits aus Abb. 4.6 für den Fall  $R_2 = 50$  (hier existierte keine Schwelle  $\epsilon_{c-a}$  bzgl. der linearisierten NSE) bekannt ist. Ebenso ist die Abnahme der überkritischen Werte, bei denen das System in den konvektiv-instabilen Bereich zurückkehrt, bei entsprechender Minderung von  $R_2$  feststellbar. Diese vollzieht sich jedoch bei  $R_2$ -Änderung weit weniger schnell, als bei der zuvor beschriebenen  $\eta$ -Variation. So z.B. liegt die obere Grenze des absolut instabilen Bereiches bei  $R_2 = -40$  für  $Re = 0$  bei etwa 120% (magenta) oberhalb der kritischen Werte, wobei man sich im Fall  $R_2 = 0$  gerade mal 65% (orange) überkritisch befindet.

Um einen besseren Gesamteindruck, der in den beiden Abb. 4.6 und 4.10 gesehenen Änderung der Stabilitätsschwellen bzgl.  $\eta$  und  $R_2$  Variation, zu gewinnen sind in Abb. 4.11 qualitativ beide Parameteränderungen zusammengestellt. Hierzu sind in der  $(\epsilon_{c-a}, Re)$  Ebene die Schwellen  $\epsilon_c(Re, \eta)|_{R_2=0}$  bei verschiedenen  $\eta$  (blau) aufgetragen und darüber in z-Richtung die sich für unterschiedliche Gegenrotationen  $R_2$  ergebenden Schwellen  $\epsilon_c(Re, R_2)|_{\eta=0.5}$ , dargestellt.

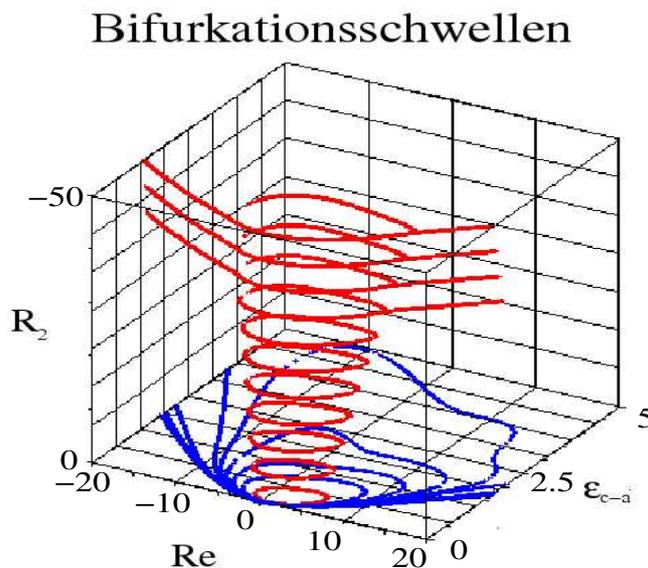


Abbildung 4.11:  
Konvektiv-instabile  
Stabilitätsschwellen  
 $\epsilon_{c-a}(Re, R_2, \eta)$  einer L2-  
SPI, bei Variation von  
 $\eta$  (blau) und  $R_2$  (rot)  
für  $\eta = 0.5; \eta = 0.5..0.7$ ,  
 $Re = -20..20$ ,  
 $R_2 = -50..0$

Gut zu erkennen ist der sich, mit zunehmender Gegenrotation, tubusartig aufweitende 'Schlauch' für  $\eta = 0.5$  (vgl. auch Abb. 4.28).

Weitere interessante Abhängigkeiten im Bezug auf die verschiedenen Stabilitätsschwellen ergeben sich bei Auftragung dieser gegen  $R_2$  für unterschiedliche  $Re$  wie in Abb. 4.12 zu sehen. Zum besseren Vergleich der unterschiedlichen Kurven wurden diese in Analogie zu den vorherigen Abbildungen skaliert. Hier allerdings auf die kritischen Werte für  $R_2 = 0$ , d.h.  $\hat{\epsilon}_{c-a} = \frac{R_{1,c-a}(Re, R_2)}{R_{1,c}(Re, R_2=0)} - 1$ . Deutlich zu erkennen ist ein zumeist einseitig geschlossener Bereich (für großes  $R_2$ ), innerhalb dessen das System im Parameterbereich der absoluten Instabilität liegt. Anders als bei den zuvor betrachteten Abhängigkeit (Abb. 4.9 und 4.10) handelt es sich nun nicht um komplett geschlossene Bereiche, in denen das System

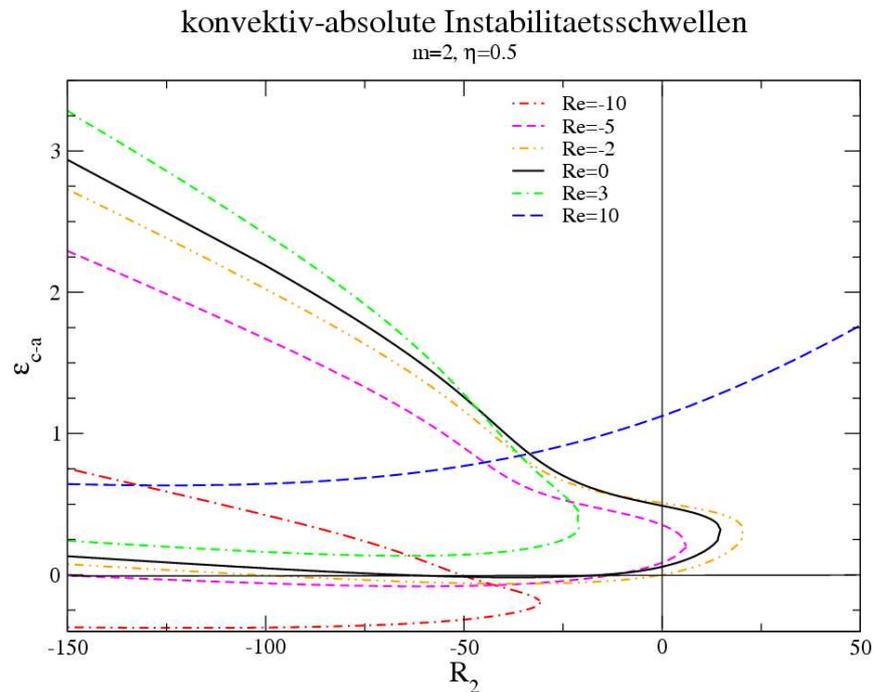


Abbildung 4.12: Konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen  $\hat{\epsilon}_{c-a}(R_2)$  einer L2-SPI als Funktion von  $R_2$  bei Variation von  $Re$ ;  $\eta = 0.5$ ; größter Wert  $R_2 = 23$  wird für Durchfluss  $Re = -2$  erreicht.

absolut instabil ist, sondern vielmehr wird dieser Stabilitätsbereich mit Zunahme von  $R_2$  zunehmend abgeschnürt, bis er letztendlich ganz verschwindet, so dass er insgesamt einer 'Zunge' ähnelt. (vgl. auch Abb. 4.28). Für  $Re = -10$  (rote Kurve) stellt dieser absolut instabile Bereich noch ein relativ dünnes Band dar. Mit Zunahme von  $Re$  verschiebt sich dieses insgesamt nach oben, d.h. zu weiter überkritischen Werten hin. Gleichzeitig kommt es aber auch zu einer Aufweitung des Bereiches. Hierbei ist ein starker Zusammenhang mit  $R_2$  festzuhalten. Während sich der Bereich für kleine  $R_2$  weiter vergrößert, so bewegt sich die Zungenspitze zunächst zu größeren  $R_2$ , bis sie schließlich für  $Re = -2$  ihr Maximum erreicht, um sich darauf hin, bei weiter steigendem  $Re$ , erneut zu kleineren  $R_2$  zu verschieben. Weitere Erhöhung des Durchflusses führt zu weiterer Rückbildung der Zunge bis es schließlich zu einem Umschlagen der oberen Stabilitätsschwelle kommt. Dies bedeutet, dass das System für  $Re > 8$  im Bereich absoluter Instabilität verbleibt, nachdem die Stabilitätsschwelle einmal überschritten ist. In diesem Bereich liegt die von TVF und 1-SPI gewohnte Abfolge der Stabilitätsschwellen vor. Wie schon aus Abb. 4.9 und 4.10 bekannt, existieren auch hier Bereiche, in denen das System scheinbar im konvektiv instabilen Zustand verharrt (für alle Rechnungen gilt:  $\mu < 7$ ). Bei diesen Parametersätzen befindet man sich bei entsprechendem  $Re$  rechts der ausgebildeten Zunge (so muss z.B. bei  $Re = 0$  für

$R_2 > 15$  gelten).

## 4.6 Sattelflächen und Sattelpunkte

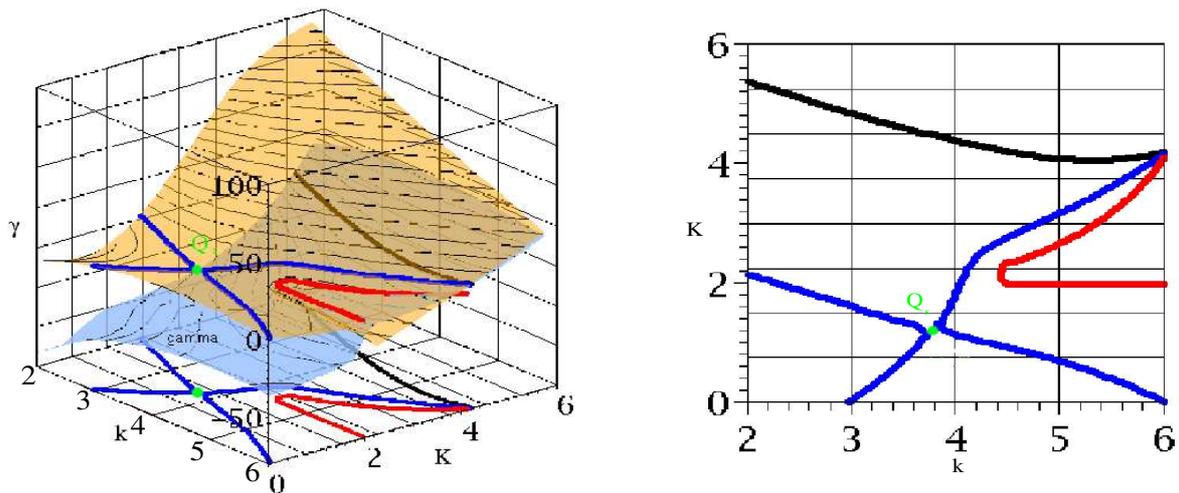


Abbildung 4.13: L2-SPI; links: Sattelflächen der beiden größten Eigenwerte (größter EW: orange; zweitgrößter EW: blau) inklusive  $\gamma = 0$  Isolinien (blau, schwarz) so wie Schnittlinien der beiden Sattelflächen (rot); rechts: Projektion dieser Linien in die  $(k, K)$  Ebene:  $\gamma = 0$ ;  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = 0$ ,  $Re = 1.58$

Um einen Einblick auf das numerische Verhalten der Stabilitätsschwellen  $\epsilon_{c-a}(Re)$  zu gewinnen, wird im Folgenden bei festem  $\eta = 0.5$  zuerst der Bereich untersucht, indem die Schwelle zunächst mit zunehmendem Durchfluss ( $0 \leq Re \leq 1.58$ ) und daraufhin bei abnehmendem  $Re < 1.58$  anwächst (vgl. Abb. 4.9 und 4.10). Gerade bei diesem Wechsel von der Zu- zur Abnahme des Durchflusses stellt sich die Frage, wie sich der gesuchte Sattelpunkt in der komplexen Ebene verhält, bzw. warum dieser für größere Durchflüsse  $Re > 1.58$  anscheinend gar nicht mehr existierend ist. Hierzu sind in der Abb. 4.13 die Sattelflächen der beiden größten Eigenwerte  $\sigma$  (größter Eigenwert:= orange, 2. größter Eigenwert:=blau) zu sehen, bei größt möglichem positiven Durchfluss  $Re = 1.58$ , für den bei gegebenem  $R_2 = 0$ , gerade noch ein Sattelpunkt durch den Code geliefert wird. Desweiteren wurden sowohl die  $\gamma = 0$ -Isolinien (blau, schwarz), als auch die Schnittlinie der beiden Eigenwertflächen (rot) mit aufgenommen und rechten Bild in die  $(k, K)$  Ebene projiziert. Der rote Punkt stellt in beiden Fällen den Sattelpunkt  $Q_s$  dar.

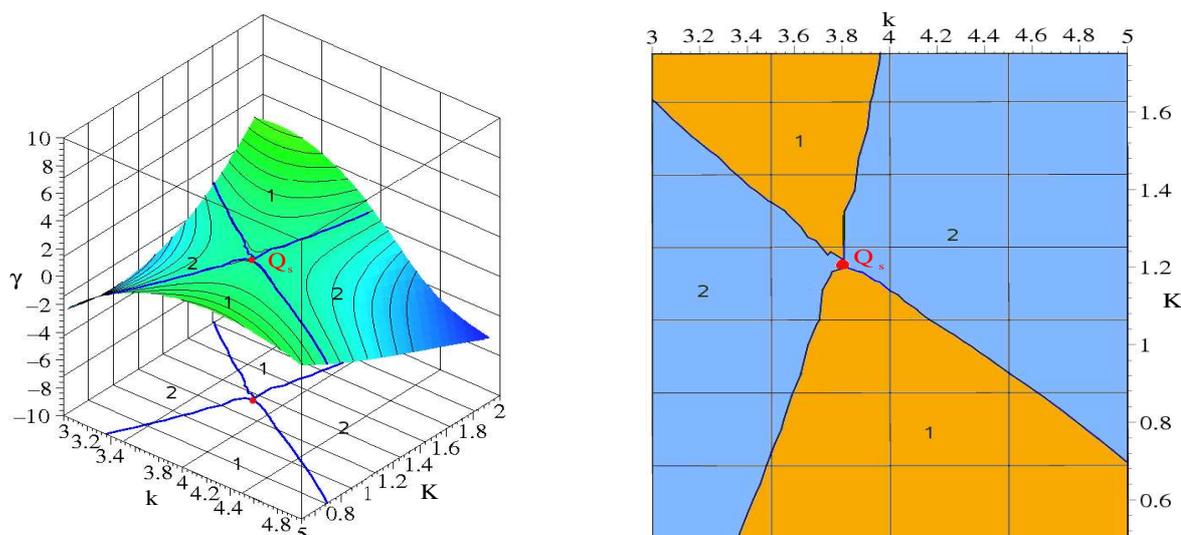


Abbildung 4.14: L2-SPI; links: Falschfarbenplot der Sattelfläche des größten Eigenwerts inklusive Sattelpunkt  $Q_s$  auf der  $\gamma = 0$ -Isofläche. Bereiche 1:  $\gamma > 0$ ; 2:  $\gamma < 0$ ; rechts: Projektion der  $\gamma = 0$  Isolinie aus 4.14 auf die  $(k, K)$  Ebene: Bereiche 1 (orange):  $\gamma > 0$ ; 2 (blau):  $\gamma < 0$ ;  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = 0$ ,  $Re = 1.58$

Auffallend ist das Durchdringen der Sattelflächen der beiden größten Eigenwerte, ein Phänomen, dass in ähnlicher Weise aber bereits bei 1-SPI in der Arbeit [32] beobachtet wurde und das an dieser Stelle nur von untergeordneter Bedeutung ist. Im Folgenden soll es speziell um den Sattelpunkt  $Q_s$  gehen und dieser ist relativ weit von den Werten bei Durchdringen der beiden Flächen entfernt. In Abb. 4.14 ist dieser entscheidende Bereich des größten Eigenwertes in der Nähe des Sattels nochmals separat im Falschfarbendarstellung zu sehen. Gut zu erkennen sind die beiden Sektoren, getrennt durch die  $\gamma = 0$ -Isolinie (blau), in denen  $\gamma > 0$  (1) oder  $\gamma < 0$  (2) ist. Der eingezeichnete rote Punkt symbolisiert den Sattelpunkt  $Q_s$  bei diesem Parametersatz (auf der  $\gamma = 0$ -Linie). Desweiteren zeigt Abb. 4.14 (links) die Projektion der  $\gamma = 0$ -Isolinie inkl. des Sattelpunkts  $Q_s$ , sowie die verschiedenen Wertebereiche  $\gamma > 0$  (orange) und  $\gamma < 0$  (blau) zu sehen. Um auch noch die anderen, aus 4.1 bekannten, notwendigen Sattelpunktsbedingungen (vgl. (4.18)) zu überprüfen wurden jeweils Schnittflächen in der  $(\gamma, k)$  und  $(\gamma, K)$  Ebene, durch den Sattelpunkt  $Q_s$  gelegt und in Abb. 4.15 dargestellt. Um zu verifizieren, dass die geforderten Bedingungen nur beim größten Eigenwert (rot) erfüllt werden, sind die entsprechenden Kurven auch für den nächst-, zweitgrößten Eigenwert (schwarz), mit in die Abbildung aufgenommen. Interessanterweise, wenn auch ohne weitere Bedeutung, stimmen die zweiten Ableitungen von  $\gamma$  nach  $k$  bzw.  $K$  (untere beiden Bilder in Abb. 4.15) an der Stelle des Sattelpunktes im Fall des größten und zweitgrößten Eigenwertes überein.

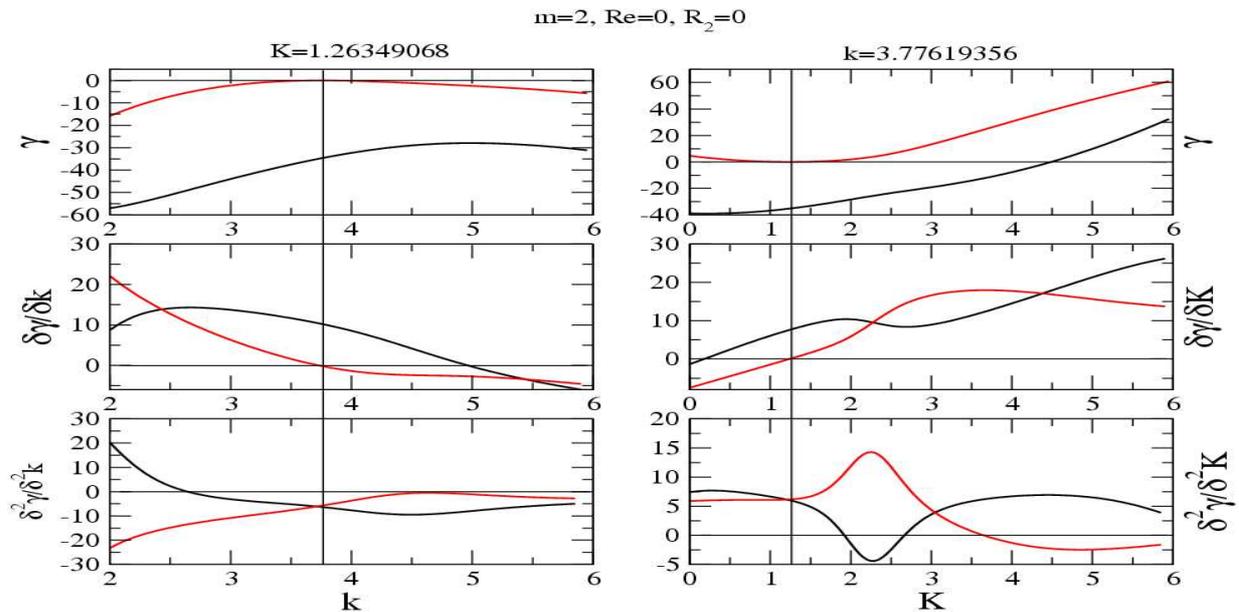


Abbildung 4.15: L2-SPI; Überprüfung der Sattelpunktsbedingungen aus 4.14, Sattelpunkt:  $Q_s = 3.77619456 + i * 1.26349068$ ; rot: größter Eigenwert; schwarz: zweitgrößter Eigenwert;  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = 0$ ,  $Re = 1.58$

Nachdem dieser als letztes, bei  $Re = 1.58$ , vom Code gelieferte Sattel verifiziert wurde, ist der Durchfluss nur minimal auf  $Re = 1.59$  erhöht und erneut die zugehörige Sattelfläche berechnet worden (Abb. 4.16). Bei diesem neuen Parametersatz liefert der Code keinen Sattelpunkt mehr, der alle Bedingungen (4.18) erfüllt. In Abb. 4.16 ist sofort zu erkennen, dass der vom Code ausgegebene Sattelpunkt nicht mehr auf der  $\gamma = 0$ -Isolinie zu liegen kommt und demzufolge eine der an ihn gestellten Voraussetzungen verletzt. Die übrigen Sattelpunktsbedingungen (4.19) wurden ebenfalls überprüft, um zu verifizieren, dass es sich hierbei wirklich um einen Sattelpunkt handelt. Analog zu Abb. 4.14 sind auch die  $\gamma = 0$ -Isolinie und die verschiedenen Wertebereiche  $\gamma > 0$  bzw.  $\gamma < 0$  in der Abb. 4.16 zu sehen. Gut zu erkennen ist die nun nicht mehr geschlossene  $\gamma = 0$ -Isolinie (blau) und der gerade in dieser Lücke zu liegen kommende Sattelpunkt  $Q_s$ . Dieser liegt im hier präsentierten Fall bei einem positiven  $\gamma$ . Für  $Re > Re_0 = 1.58$  (bei  $\eta = 0.5$ ) wächst der Sattelpunkt über die  $\gamma = 0$  Ebene hinaus, so dass eine der an ihn gestellten Bedingungen 'verletzt' wird. Aufgrund der Tatsache, dass der Sattelpunkt nun nicht mehr in der  $\gamma = 0$ -Ebene liegt, kann der Code keine Lösung für die konvektiv-instabilen Stabilitätsschwelle liefern, denn die nach (4.18) notwendige Sattelpunktsbedingung ist nun nicht mehr vollständig zu erfüllen.

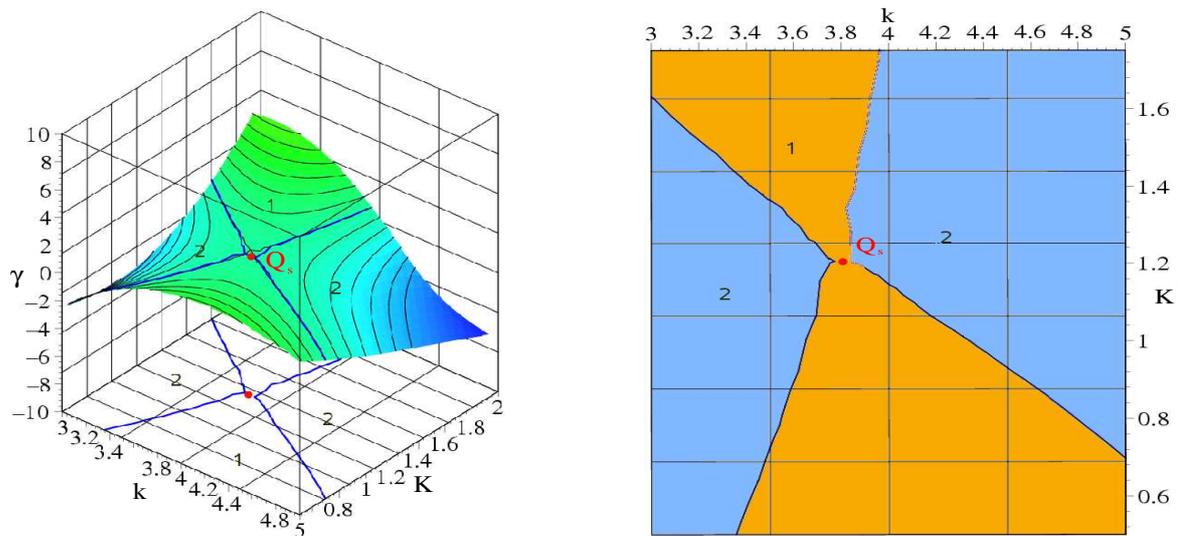


Abbildung 4.16: L2-SPI: links: Falschfarbenplot der Sattelfläche des größten Eigenwerts inklusive Sattelpunkt  $Q_s$ ; dieser befindet sich nun deutlich erkennbar oberhalb der  $\gamma = 0$ -Isofläche. Bereiche 1:  $\gamma > 0$ ; 2:  $\gamma < 0$ ; rechts: Projektion der  $\gamma = 0$  Isolinie aus 4.16 auf die  $(k, K)$  Ebene: Bereiche 1 (orange):  $\gamma > 0$ ; 2 (blau):  $\gamma < 0$ ; Kontrollparameter:  $m = 2$ ,  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = 0$ ,  $Re = 1.59$

Bis hierher läßt sich als Ergebnis der Betrachtung der Stabilitätsschwellen und der hierzu notwendigen Ermittlung von Sattelpunkten festhalten, dass es bei gegebenem Parametersatz und Zunahme von  $Re$  eine Art kritischen Durchfluss gibt, so dass der Sattelpunkt für noch größere  $Re$  zwar weiter existiert, aber über die  $\gamma = 0$ -Ebene hinauswächst. Dies hat eine Verletzung einer der in (4.18) und (4.20) an ihn gestellten Bedingungen zur Folge, wonach in diesem Bereich  $Re > Re_0$  keine Lösung mehr für die Schwelle zwischen konvektiver und absoluter Instabilität existiert. Das System verbleibt bei solchen Parametersätzen im Zustand konvektiver Instabilität (zumindest für die hier untersuchten überkritischen Bereich bis  $\mu = 7$ ). Weiterhin konnte festgestellt werden, dass die GLN im Bezug auf L2-SPI, bei gewissen Parametersätzen (z.B.  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = 0$ ) keine Aussagekraft mehr besitzt und schließlich sogar vollkommen versagt ( $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = 50$ , hier liefert die GLN eine Lösung der Schwelle  $\epsilon_{c-a}$ , obwohl nach den vollen linearen Gleichungen keine solche existiert.).

### 4.7 Verlauf der Sattelpunkte in der komplexen $(k, K)$ Ebene

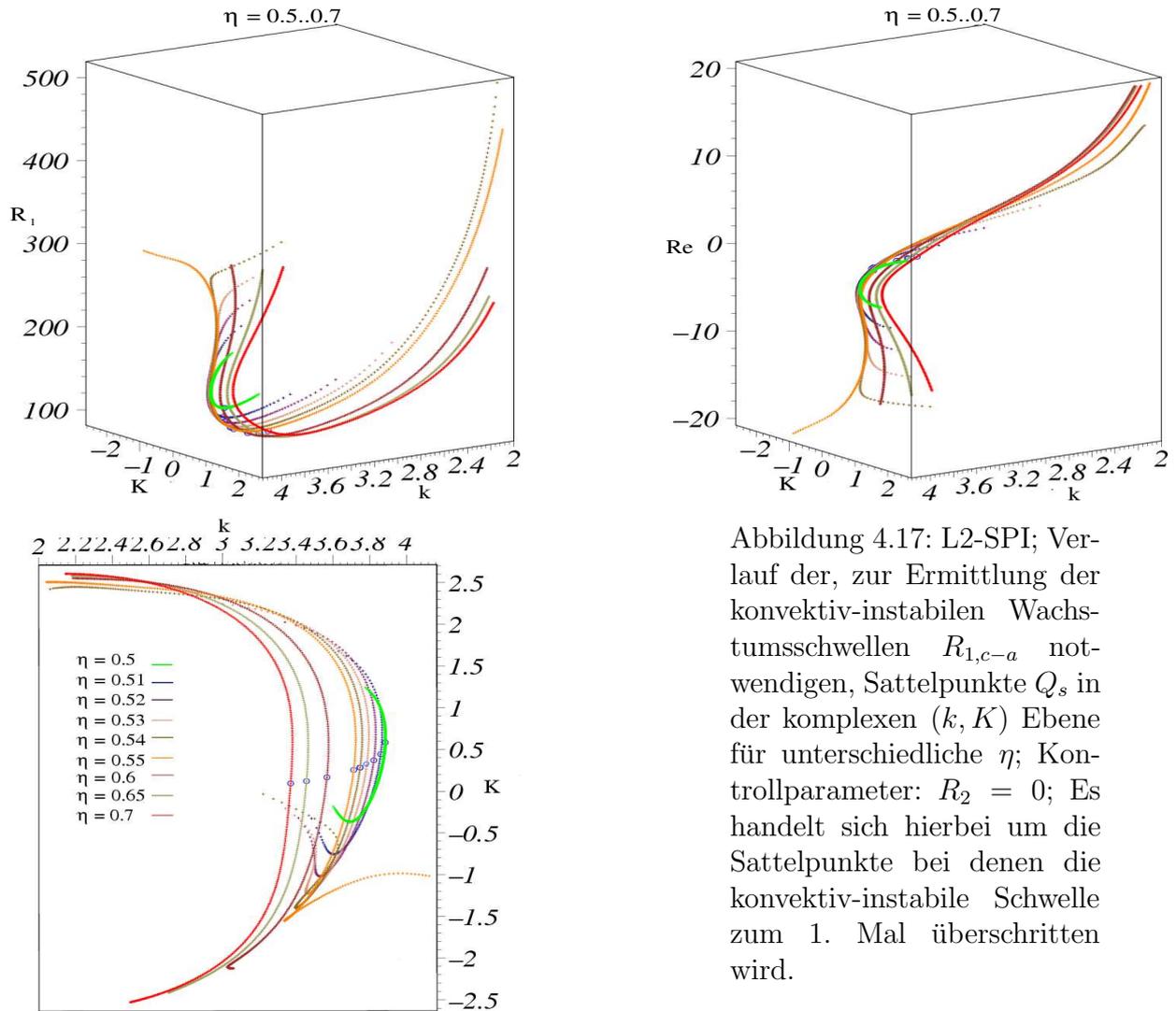


Abbildung 4.17: L2-SPI; Verlauf der, zur Ermittlung der konvektiv-instabilen Wachstumsschwellen  $R_{1,c-a}$  notwendigen, Sattelpunkte  $Q_s$  in der komplexen  $(k, K)$  Ebene für unterschiedliche  $\eta$ ; Kontrollparameter:  $R_2 = 0$ ; Es handelt sich hierbei um die Sattelpunkte bei denen die konvektiv-instabile Schwelle zum 1. Mal überschritten wird.

In Abb. 4.17 ist die Bewegung der Sattelpunkte, welche zur Bestimmung der konvektiv-instabilen Stabilitätsschwelle (Abb. 4.9) ermittelt wurden, bei unterschiedlichen  $\eta$  über der komplexen  $(k, K)$  Ebene für verschiedene  $R_1$  und  $Re$  aufgetragen. Dabei beschränken sich diese auf den unteren Teil der Lösungen aus Abb. 4.9. Die blau eingekreisten Werte entsprechen den bei jeweiligem  $\eta$  zugehörigen Sätteln ohne Durchfluss ( $Re = 0$ ). Wie zu erkennen bewegen sich diese mit zunehmendem  $0.5 \leq \eta \leq 0.7$  in der komplexen Ebene sowohl zu kleineren  $k$ -, als auch kleineren  $K$ - Werten hin. Im Grenzfalle  $\lim \eta \rightarrow 1$  wird  $k$  zunehmend kleiner und  $K$  verschwindet schließlich völlig. Wie in Abb. 4.17 (oben) zu sehen, führen die Sattelpunkte bzgl. der beiden Parameter  $R_1$  und  $Re$  keine einfache

Bewegung aus. Dies wird auch deutlich in der Projektion auf die  $(k, K)$  Ebene (Abb. 4.17, links unten). Bei  $\eta = 0.5$  führt ein betragsmäßig wachsendes  $Re$  zu einer Verschiebung der Sattelpunkte hin zu kleineren  $k$ -Werten. Weiterhin wächst  $K$  bei  $Re > 0$ , während dies für  $Re < 0$  zunächst kleiner wird, um aber schließlich erneut anzuwachsen. Dies gilt qualitativ auch für die weiteren betrachteten  $\eta = 0.51..0.54$ . Generell gilt für alle  $\eta = 0.5..0.7$ : Positive Durchflüsse  $Re > 0$  verschieben den Sattelpunkt  $Q_s$  hin zu kleineren  $k$  und größeren  $K$  Werten. Ab  $\eta = 0.53$  (tan) zeigt sich durch noch stärkeres  $Re < 0$  erstmals ein neues Verhalten: Hier wird der zugehörigen Sattelpunkt ab  $Re = -10.1$  zu größeren  $k$  Werten hin verschoben, und für  $Re < -13.1$  die  $k$  Werte erneut abmindert. Für  $\eta = 0.54$  (sienna) ist dieser Effekt noch stärker ausgebildet, bis dieser erneut in abgewandelter Form bei  $\eta = 0.55$  (coral) auftritt. Nun fallen die  $k$  Werte der Sättel für  $Re < 0$  erstmals nicht erneut zu kleineren Werten hin ab, sondern wachsen fortlaufend an. Zudem fallen nun erstmals auch die  $K$  Werte mit Verkleinerung von  $Re < 0$  nicht weiter ab, sondern wachsen ab  $Re = -11.7$  leicht an. Auch für  $\eta = 0.6$  (braun) wachsen die Realteile für  $Re < -16.8$  an, während die Imaginärteile nun aber auch über dieses  $Re$  hinweg weiter abfallen. Der Umkehrpunkt liegt dabei gerade am unteren Ende des hier betrachteten Bereichs bei  $Re = -20$ . Das zuvor bei  $\eta = 0.55$  noch gut erkennbare, kurzzeitige Wachstum tritt hierbei nicht mehr in Erscheinung. Analog verhalten sich die Werte für  $\eta = 0.65, 0.7$  (khaki, rot), der Umkehrpunkt liegt hier jedoch schon außerhalb des untersuchten Parameterbereichs.

## 4.8 Existenz mehrerer Sättel

Nachdem in Abschnitt 4.6 geklärt wurde, warum bei gewissen Parametersätzen keine konvektiv-instabile Stabilitätsschwelle mehr existiert, soll nun das Problem untersucht werden, dass es ebenso Parameterbereiche gibt, für die eine zweite Lösung existiert (z.B. Abb. 4.10). Um diese 'Mehrdeutigkeit' in der Lösung dieser Stabilitätsschwelle zu untersuchen, seien im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich erwähnt die folgenden Parameter für eine L2-SPI zugrundegelegt:  $R_2 = -40$ ,  $\eta = 0.5$ . In Abb. 4.18 ist ein entsprechender Auszug des Stabilitätsdiagramms bei diesen Parametern zu sehen. Desweiteren sind darin noch die beiden von nun an betrachteten Durchflüsse  $Re = -11.83$ , sowie  $Re = 0$  besonders kenntlich gemacht und die zugehörigen Lösungen der Schwelle bei diesen  $Re$  mit Ziffern 1 bis 4 versehen, auf die im weiteren Bezug genommen wird.

Die zu den in Abb. 4.18 gehörenden Sattelpunkte der Lösungen sind explizit in den beiden Abb. 4.19 für den Fall  $Re = -11.83$  und Abb. 4.23a,b für  $Re = 0$  zusammengestellt. Betrachtet man sich die beiden in Abb. 4.19, zu den Lösungen 1 und 2 gehörigen Sättel, so ist der Unterschied dieser ganz offensichtlich.

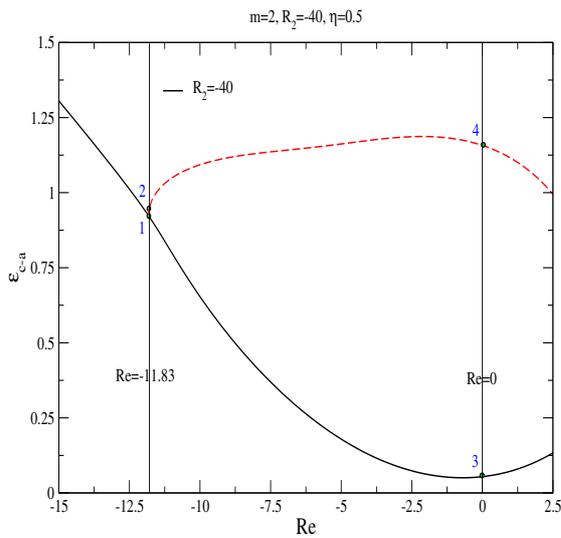


Abbildung 4.18: L2-SPI: Auszug aus dem Stabilitätsdiagramm Abb. 4.10 mit markierten Lösungen 1 bis 4 für  $Re = -11.83$  und  $Re = 0$ ;  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = -40$

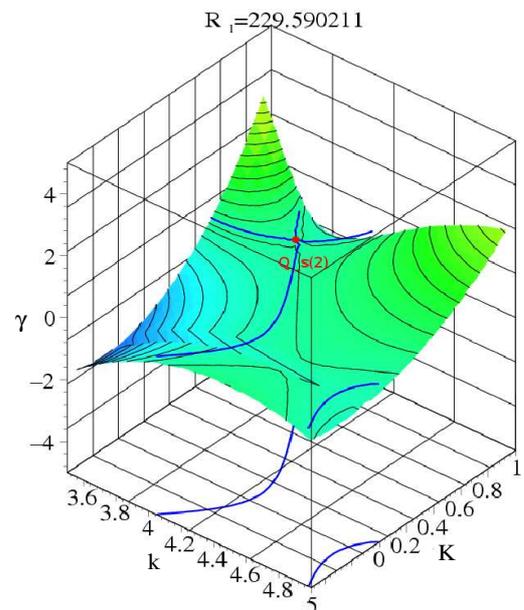
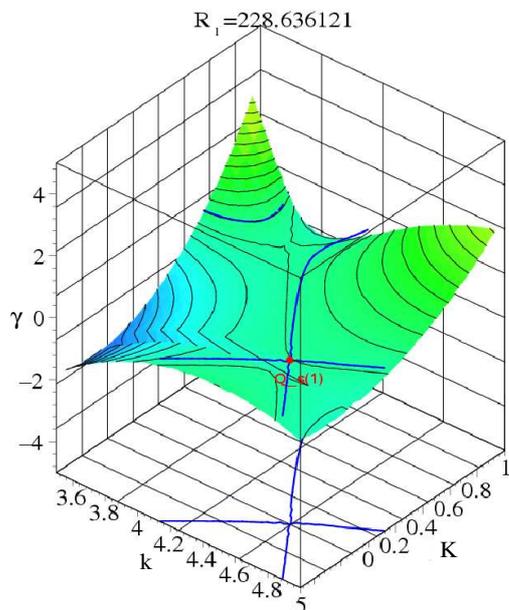


Abbildung 4.19: Doppelsattelflächen der L2-SPI bei  $Re = -11.83$  der Lösungen 1 (links,  $R_1 = 228.636121$ ) und 2 (rechts,  $R_1 = 229.656211$ ) aus Abb. 4.18;  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = -40$

Bei 1 handelt es sich um einen Sattel  $Q_{s(1)} = k_{s(1)} + iK_{s(1)}$  bzgl. dessen  $k_{s(1)} = k_{max}$  ein lokales Maximum und demzufolge  $K_{s(1)} = K_{min}$  ein lokales Minimum besitzt. So verhält es sich bei dem zu einem höheren  $R_1$  gehörigen Sattel  $Q_{s(2)} = k_{s(2)} + iK_{s(2)}$  gerade umgekehrt; d.h.  $k_{s(2)} = k_{max}$  und  $K_{s(2)} = K_{min}$ . Entsprechendes gilt vollkommen analog für die beiden

Sättel 3 und 4, wie im Einzelnen aus Abb. 4.23a,b hervorgeht.

Um dieses Verhalten, oder vielmehr das Erscheinen dieser beiden unterschiedlichen Sättel verstehen zu können wurde bei jeweils fixiertem Durchfluss  $Re = 0$ , bzw.  $Re = -11.83$  eine  $R_1$ -Rampe gefahren. Bzgl. der Lösungen 1 und 2 wurde diese für Werte  $228 \leq R_1 \leq 230$  mit  $\Delta R_1 = 0.1$  realisiert, so dass die beiden Sättel der Lösungen zu 1 ( $R_1 = 228.636121$ ) wie auch zu 2 ( $R_1 = 229.656211$ ) deutlich innerhalb dieses  $R_1$ -Bereiches zu liegen kommen. Der Vorteil bei  $Re = -11.83$  liegt dabei darin, dass man sich sehr nah bei dem Durchfluss ( $Re \approx -11.9$ ) befindet, bei dem die Lösungen aufeinanderzulaufen. Somit ist es, wie bereits in Abb. 4.19 zu erkennen war, gut möglich das qualitative Verhalten beider Sättel gleichzeitig bei  $R_1$  Variation zu beobachten. Bei  $Re = 0$  ist dies leider nicht der Fall, hierbei ist dafür das Umkippen des Sattels 3 in einen der Art 4 festzustellen.

Die Darstellung der Sättel bzgl.  $R_1$  Variation in einem Plot ist allerdings nicht ganz so einfach. In den beiden Abb. 4.20 und 4.21 ist hierzu die  $\gamma = 0$  Isofläche bzgl. der verschiedenen  $R_1$  über der komplexen  $(k, K)$  Ebene aus zwei verschiedenen Blickwinkeln, bzw. eine Projektion dieser in die die komplexe  $(k, K)$  Ebene dargestellt. Um besser die Bedeutung dieser Isofläche verstehen zu können sind in Abb. 4.21 (unten) exemplarisch nochmals die beiden Sattelflächen der Sättel, die beide die Sattelpunktsbedingung erfüllen inklusive  $\gamma = 0$ -Isolinien aufgetragen. Diese entsprechen den beiden in 4.20 zusätzlich mit eingezeichneten Linien (schwarz). Gerade die Sättel dieser  $R_1$ -Werte gehören zu den Lösungen (1 und 2 in Abb. 4.18) der Wachstumsschwelle  $R_{1c-a}$ . Diese sind identisch mit den in der Abb. 4.19 bereits mit eingetragenen blauen  $\gamma = 0$  Isolinien. Wie gut zu erkennen ist, zeichnen sich diese beiden Kurven ganz offensichtlich dadurch aus, dass sie genau einen Schnittpunkt besitzen, dessen zugehörige  $(k, K)$ -Werte den gesuchten Sattelpunkt charakterisieren. Die entsprechenden  $\gamma = 0$ -Isolinien zu anderen  $R_1$ -Werten besitzen diesen Schnittpunkt eben gerade nicht. Dies bedeutet, dass der zu dieser Fläche gehörige Sattel entweder ober- oder unterhalb der  $\gamma = 0$  Ebene zu liegen kommt. Hierzu sind in der Darstellung der  $\gamma = 0$  Isofläche die unterschiedlichen Wertebereiche bzgl.  $\gamma$  farbcodiert dargestellt. Blaue Bereiche entsprechen  $\gamma < 0$  Werten und dementsprechend symbolisieren rote Bereiche  $\gamma > 0$  Werte. Die Interpretation der Abb. 4.20 lautet nun wie folgt. Ist die innere Reynoldszahl mit  $R_1 = 228$  gegeben, so befinden sich beide Sättel noch unterhalb der  $\gamma = 0$  Ebene, was sich darin äußert, dass auch auf der  $\gamma = 0$ -Isofläche noch kein Sattel existiert (vgl. Abschnitt 4.3 (4.20)). Mit Zunahme von  $R_1$  bewegen sich beide Sättel in Richtung der  $\gamma = 0$  Ebene, was sich in einem Zusammenziehen der Fläche bzgl. des Parameters  $K$  zeigt. Bei  $R_1 = 228.63$  erreicht der erst von beiden (Abb. 4.20 (unten rechts)) diese Ebene und erfüllt somit nun alle an ihn gestellten Bedingungen bzgl. der konvektiv-instabilen Wachstumsschwelle, während der zweite Sattelpunkt noch weiter oberhalb von  $\gamma = 0$  zu liegen kommt. Mit weiter anwachsendem  $R_1$  schiebt sich dieser aber ebenfalls weiter in Richtung der  $\gamma = 0$ -Ebene, d.h. für diesen schnürt sich die Fläche bzgl.  $K$  weiterhin zu. Während der andere Sattel von nun ab unter dieser Ebene liegt, was sich in der Aufweitung der Isofläche bzgl. des anderen Parameters  $k$  darstellt.

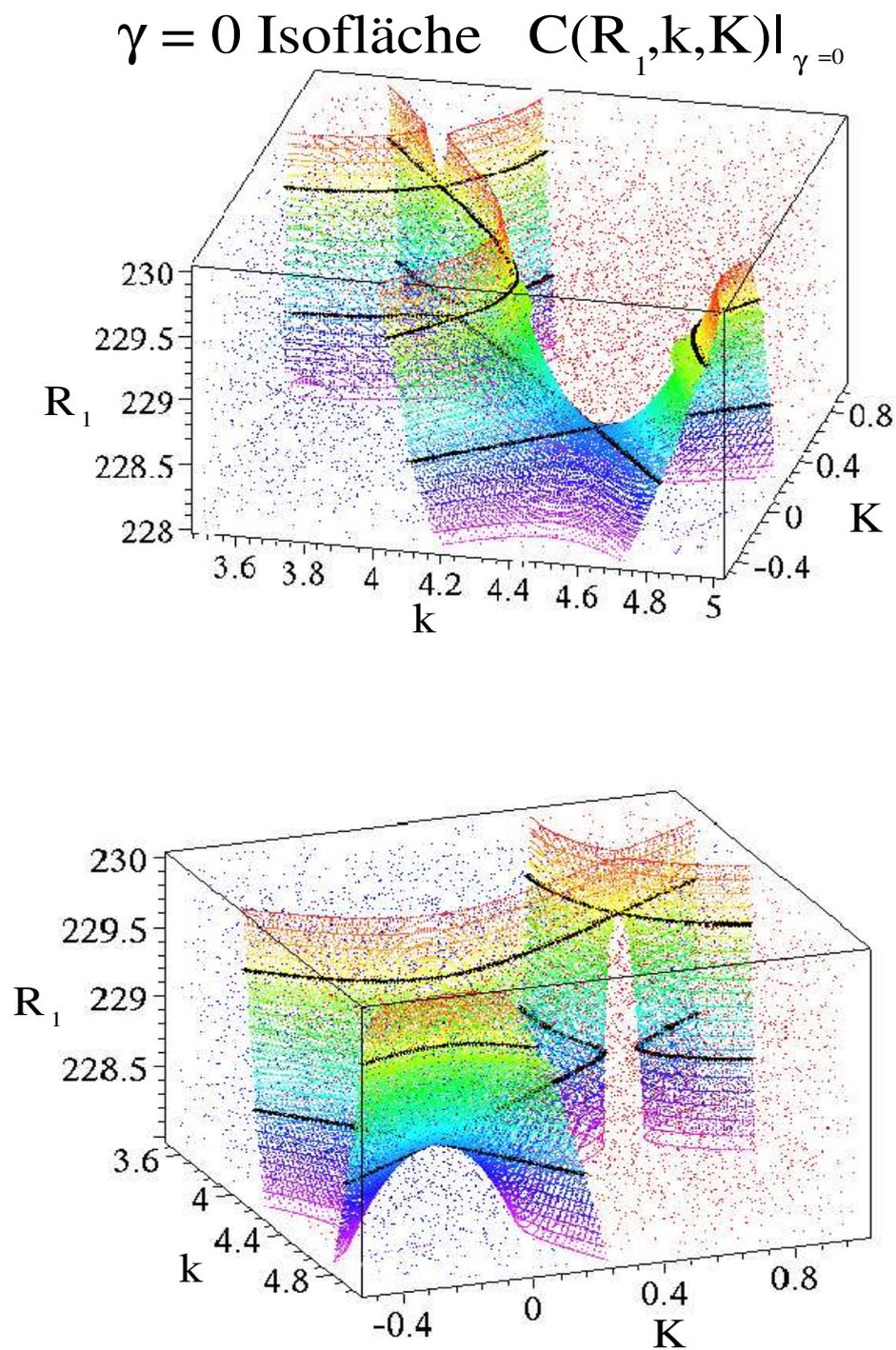


Abbildung 4.20: L2-SPI:  $\gamma = 0$ -Isofläche bei  $R_1$  Variation  $R_1 = 228..239$ ,  $\Delta R_1 = 0.1$  aus zwei verschiedenen Blickwinkeln [38]; untere schwarze Linie:  $R_1 = 228.636121$ ; obere schwarze Linie:  $R_1 = 229.656211$ ;  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = -40$ ,  $Re = -11.83$

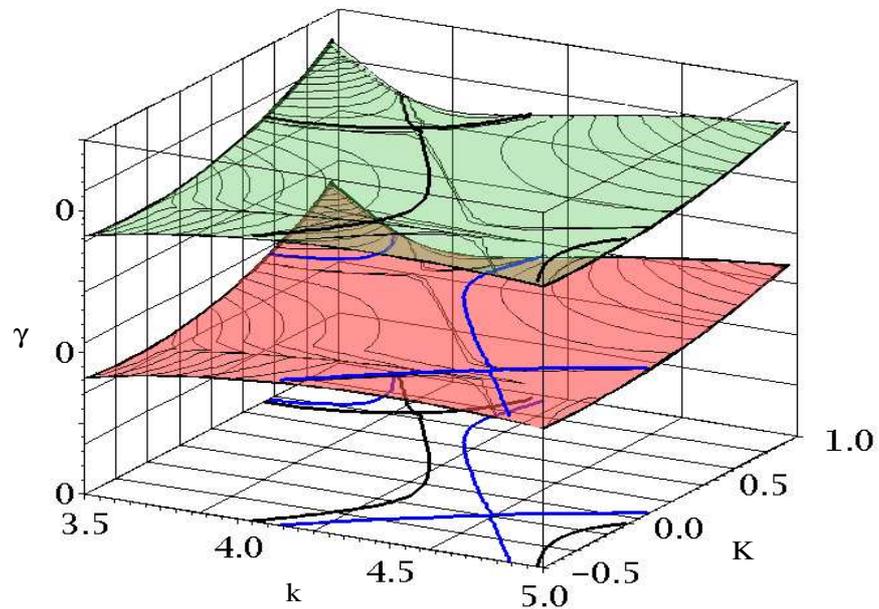
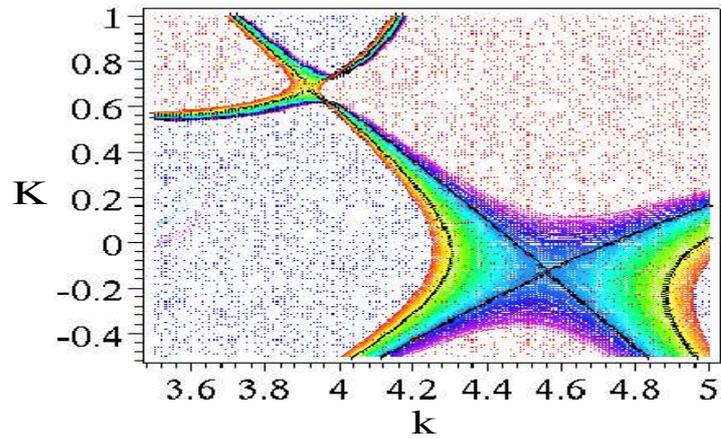


Abbildung 4.21: L2-SPI: oben: Projektion der  $\gamma = 0$ -Isolinien bei  $R_1$  Variation aus Abb. 4.20 auf die komplexe  $(k, K)$  Ebene; (unten): Sattelfläche mit zwei Sattelpunkten bei  $R_1 = 228.636121$  inklusive eingetragener  $\gamma = 0$ -Isolinie, sowie deren Projektion; ( $-i$  siehe Movie-file)  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = -40$ ,  $Re = -11.83$

Dieses Verhalten setzt sich bis zu dem hier betrachteten  $R_1 = 230$  unverändert fort. Vollkommen analog weitet sich nach Erreichen von  $R_1 = 229.59$ , hier erfüllt der zweite Sattel die Bedingungen bzgl. der konvektiv-instabilen Wachstumsschwelle, der Isofläche ebenfalls bzgl.  $k$  auf, so dass auch dieser Sattelpunkt unterhalb von  $\gamma = 0$  liegt. Zum besseren Verständnis dessen ist in Abb. 4.22, wie schon früher geschehen, die Projektion der  $\gamma = 0$  Isolinien auf die  $(k, K)$ -Ebene zu sehen und entsprechende  $\gamma$ -Werte farbkodiert; orange:  $\gamma > 0$ ; hellblau:  $\gamma < 0$ ; Aus Abb. 4.20 wird ersichtlich, dass sich in dem Maße, wie sich der eine Sattel  $Q_{s(1)}$ , mit zunehmendem  $R_1$ , über die  $\gamma = 0$ -Ebene erhebt, der andere Sattel  $Q_{s(2)}$  sich dieser von oben annähert.

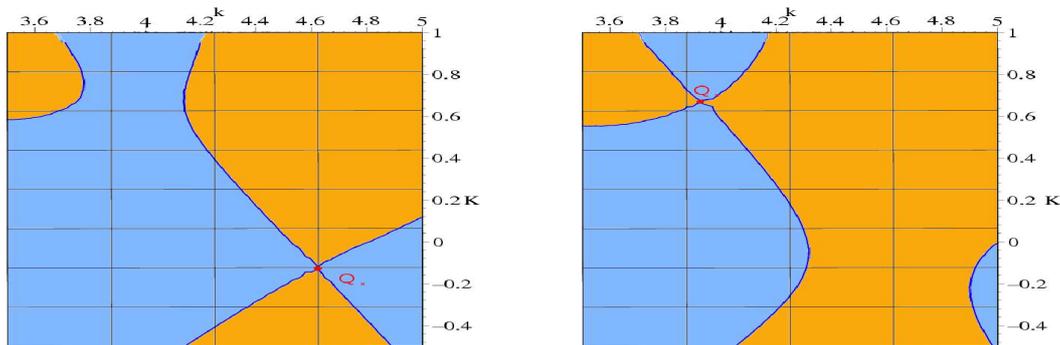


Abbildung 4.22: L2-SPI: Grafik der  $\gamma = 0$ -Isolinie (blau) mit Farbkodierung der  $\gamma$  Werte; orange:  $\gamma > 0$ ; hellblau:  $\gamma < 0$ ; links,  $R_1 = 228.636121$ ; rechts,  $R_1 = 229.656211$ ;  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = -40$ ,  $Re = -11.83$

Analog der bei  $Re = -11.83$  gefahrenen  $R_1$ -Rampe aus Abb. 4.20 sind in Abb. 4.23 einige ausgewählte Sattelpunkte bei  $Re = 0$  zu sehen, die bei der Bestimmung der Frontpropagationen (vgl. Abschnitt 5.4) benötigt werden. Im wesentlichen handelt es sich auch hierbei um eine  $R_1$ -Rampe, im Vergleich zu 4.20 allerdings um einen sehr viel größeren  $R_1$ -Bereich (hier  $120 \leq R_1 \leq 260$ ). In Abb. a) handelt es sich gerade um den Sattel, der zu der Lösung 3 aus Abb. 4.18 gehört und entsprechend gehört b) zu der Lösung 4. Wie auch schon bei  $Re = -11.83$  gesehen, so sind auch hierbei die beiden

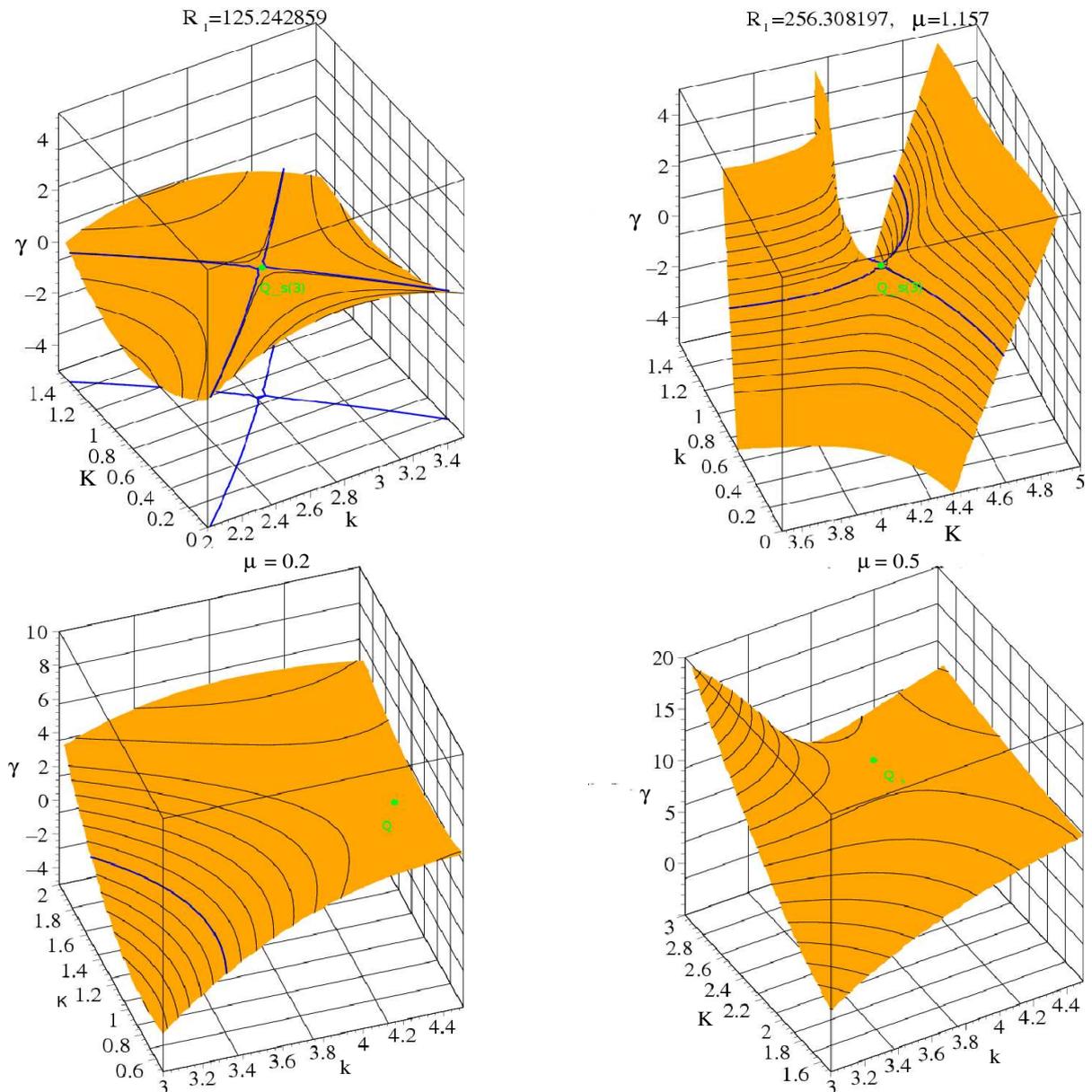


Abbildung 4.23: L2-SPI: Sattelflächen für verschiedene überkritische Werte  
 a)  $\mu = 0.054 := R_1 = 125.242859$  (Lsg. 3 aus Abb. 4.18); b)  $\mu = 1.157 := R_1 = 256.308197$  (Lsg. 4 aus Abb. 4.18); c,d)  $\mu = 0.2, 0.5$ ;  $\eta = 0.5$ ,  $R_2 = -40$ ,  $Re = 0$

Sattelflächen, die zu der unteren, bzw. oberen absolut-konvektiven Instabilitätsschwelle gehören, gerade bzgl. Minima und Maxima in den beiden Werten  $k, K$  miteinander vertauscht. In c) und d) der Abb. 4.23 ist zu erkennen, wie sich mit Zunahme von  $\mu$  der Sattel verschiebt und die Sattelfläche in dessen Nähe abflacht, bis schließlich das angesprochene Umkippen des Sattels stattfindet. Genauere Rechnungen hierzu konnten dieses auf Werte zwischen  $0.3 \leq \mu \leq 0.35$  eingrenzen.

Da es sich bislang fast ausschließlich um Untersuchungen zu L2-SPI handelte, soll an dieser Stelle auch kurz ein Vergleich mit anderen Spiralen anderer azimuthaler Wellenzahl gegeben werden. Hierzu sind in Abb. 4.24 absolute  $R_{1c-a}(R_2)$  und konvektive  $R_{1c}(R_2)$  Stabilitätsschwellen für  $M = 0, 1, 2, 3$  Strukturen als Funktion von  $R_2$  aufgetragen. Gut zu erkennen ist die bereits aus Abb. 4.12 bekannte obere Schwelle  $R_{1c-a}(R_2)$  für den Fall der L2-SPI berechneten Überschreiten das System in den konvektiv-instabilen Zustand zurückkehret. Weiterhin bleibt festzuhalten, dass sich der Übergang in den Bereich absoluter Instabilität für wachsende  $M$  zu deutlich stärker überkritischen Werten verschiebt. Beim TVF unterscheiden sich die Schwellen für  $R_{1c}(R_2)$  und  $R_{1c-a}(R_2)$  nur marginal, so dass auch in dem vergrößerten Bereich links unten in Abb. 4.24 kein Unterschied aufzulösen ist. Bei der L1-SPI ist dieser, wenn auch sehr schwach im Bereich  $-50 \leq R_2 \leq 0$  erkennbar. Für die hier bevorzugt diskutierten L2-SPI liegen die beiden Stabilitätsschwellen  $R_{1c}(R_2), R_{1c-a}(R_2)$  deutlich auseinander. Dieser Zwischenbereich weitet sich für die L3-Struktur noch deutlich aus. Interessant ist, dass bei diesem Parametersatz bei  $M = 3$  anders als bei  $M = 2$  keine obere Schwelle für den Rückschritt in den konvektiv-instabilen Bereich gefunden werden konnte.

Anders als in Abb. 4.24 sind in den Abb. 4.25 und 4.26 die verschiedenen Bifurkationsschwellen und deren zugehörige Frequenzen für die Strukturen  $M = 0, \pm 1, \pm 2$  bei  $R_2 = 0$  und Durchflüssen  $-40 \leq Re \leq 40$  aufgetragen. Gut zu erkennen ist die Symmetrie von  $R_{1c}(Re)$  und  $R_{1c-a}(Re)$  in Abhängigkeit von  $Re$  im Fall des TVF. Ebenso zeigt sich die Symmetrieentartung bei auferlegtem Durchfluss  $Re \neq 0$  der 1- und 2-SPI (d.h. bei Übergang von  $Re \rightarrow -Re$  ist die L-SPI das Spiegelbild einer R-SPI und umgekehrt). Die konvektiven Stabilitätsschwellen  $R_c(Re)$  der  $M = \pm 1, \pm 2$  Strukturen besitzen ihr Minimum für  $Re \neq 0$ , während sich diese für die absoluten Schwellen  $R_{1,c-a}(Re)$  zu betragskleinen  $Re$  hin verschieben. Interessant ist aber die Tatsache, dass die absolute Stabilitätsschwelle  $R_{1c-a, M=1,2}(Re)$  der L1- und L2-SPI immer oberhalb der konvektiven Stabilitätsschwellen  $R_{1c, M=-1,-2}(Re)$  der R1- und R2-SPI liegt, und umgekehrt. Es scheint, dass eine  $M$  Struktur erst dann absolut wachstumsfähig ist, wenn die entsprechende Gegenstruktur  $-M$  zumindest konvektiv wachstumsfähig ist. Desweiteren sind im Fall der L2-SPI die bereits beschriebenen Phänomene des Sprungs in der absoluten Stabilitätsschwelle  $R_{1c}(Re)$ , sowie das geschlossene Gebiet, die Insel absoluter Instabilität erkennbar.

Auch in den zugehörigen Frequenzen  $\omega_c(Re), \omega_{c-a}(Re)$  der entsprechenden Stabilitätsschwellen  $R_{1c}(Re), R_{1c-a}(Re)$  ist die durch den Durchfluss  $Re$  verursachte Symmetrieentartung gut erkennbar. Wie bereits aus Abschnitt 2.3.2 bekannt Verhalten sich die kritischen

Frequenzen  $\omega_c(Re)$  der konvektiven Stabilitätsschwellen von TVF und 1-SPI (durchgehende schwarz,rot,grüne Linien) im Wesentlichen linear mit dem Durchfluss  $Re$ . Positivere  $Re$  verschieben die kritischen Frequenzen  $\omega_c(Re)$  zu ebenfalls positiveren Werten.

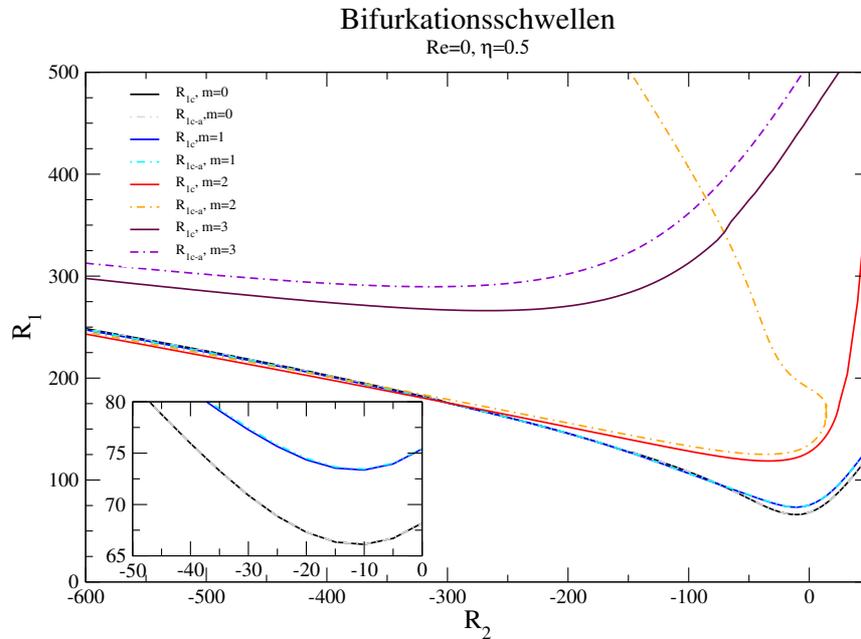


Abbildung 4.24: Absolute und konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen von  $M = 0, 1, 2, 3$  Strukturen als Funktion von  $R_2$  für  $\eta = 0.5$ ;  $Re = 0$ ,

Analog den 'Sprüngen' in den Bifurkationsschwellen  $R_{1c}(Re)$  der Abb. 4.25 sind wie zu erwarten ebenso solche in den kritischen Frequenzen  $\omega_c(Re)$  der 2-SPI zu erkennen. Während die Frequenzen  $\omega_c(Re)$  der L2-SPI für  $Re < -6.2$  zwar ebenso linear mit  $Re$  verlaufen, hierbei jedoch abfallen, so zeigen sie ab dem hier auftretenden Sprung zunächst eine deutlich Krümmung und somit nicht-lineares Verhalten. Für zunehmendes  $Re > -6$  wachsen die Frequenzen  $\omega_c(Re)$  der L2-SPI analog derer von TVF und 1-SPI an. Während die Frequenzen  $\omega_{c-a}(Re)$  zu den absoluten Stabilitätsschwellen beim TVF (strichpunktierte schwarze Linie) nur schwach um die kritischen Frequenzen  $\omega_c(Re)$  schwanken, so ist bei den 1-SPI (strichpunktierte rot, grüne Linie) ein deutlich parabolisches Verhalten im Bezug auf  $Re$  erkennbar. Wie auch bei den Bifurkationsschwellen gesehen ergeben sich bei 2-SPI (strichpunktierte orange, blaue Linie) auch in den Frequenzen  $\omega_{c-a}(Re)$  geschlossene Kurven. Ineressant im Bezug auf die Sprünge in den L2-SPI ist aber, dass diese gerade bei dem  $Re$  auftreten, bei dem die zugehörigen  $\omega_c$  der L1-SPI verschwinden  $\omega_{c,M=2}(Re = -6.2) = 0$  (Für die R2-SPI analog bei  $Re = 6.2$ ). Dieser Durchfluss entspricht aber auch demjenigen, für den bei nichtlinearer Rechnung [11] eine L1-SPI in eine R1-SPI übergeht.

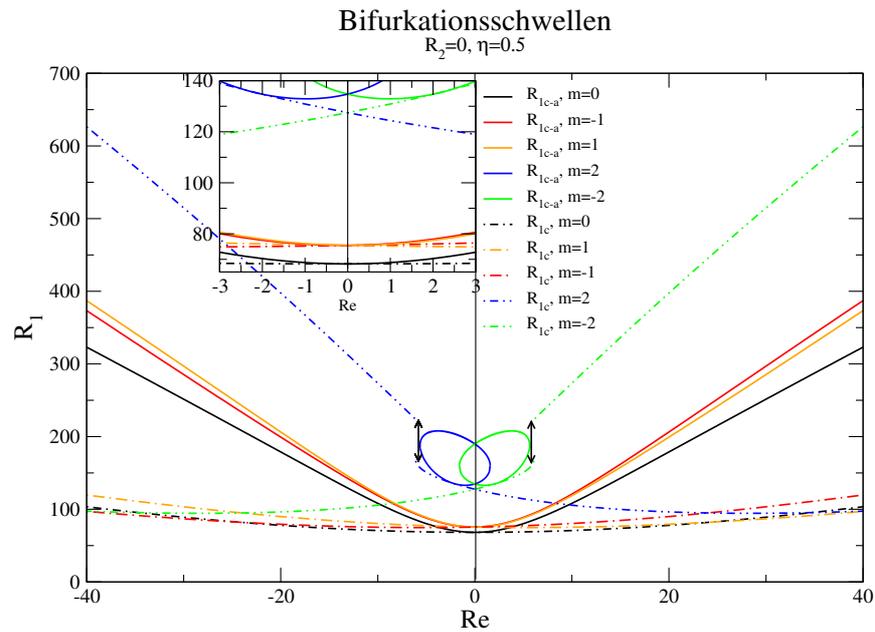


Abbildung 4.25: Absolute und konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen von TVF, 1- und 2-SPI als Funktion von  $Re$  für  $\eta = 0.5$ ;  $R_2 = 0$

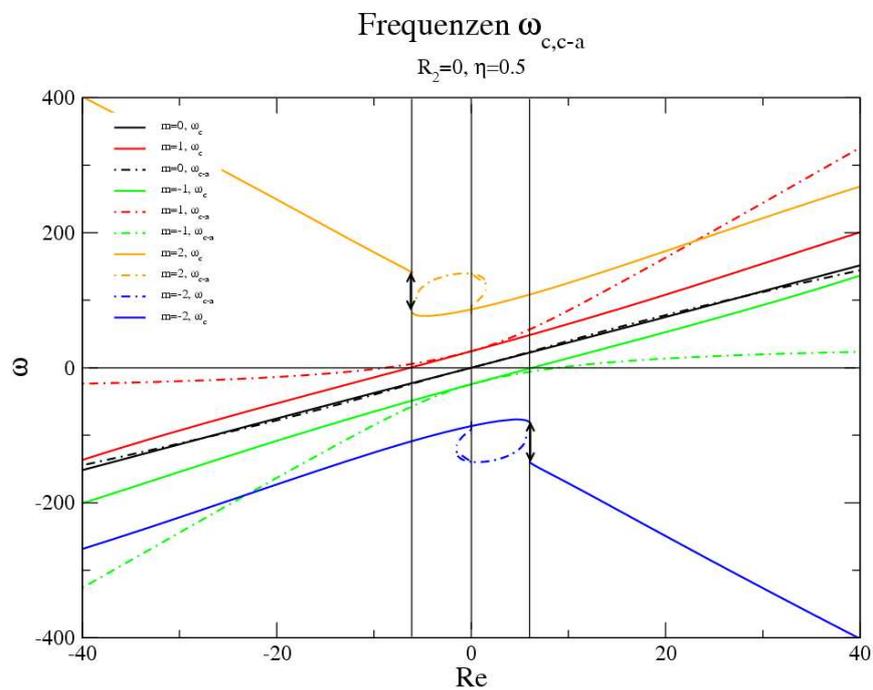


Abbildung 4.26: Zugehörige Frequenzen zu den Stabilitätsschwellen von TVF, 1- und 2-SPI aus Abb. 4.25 als Funktion von  $Re$ ;  $R_2 = 0$

Unverständlich ist aber die Tatsache, dass die Frequenzen  $\omega_c(Re)$  der L2-SPI für Durchflüsse  $Re < -6$  anwachsen. Warum sollte sich die Bewegung einer Struktur, die von selbst in positive Durchflussrichtung propagieren würde, zunächst mit stärkerem Gegenblasen verlangsamen, was der Erwartung und dem gewohnten Verhalten von L1-SPI entspricht, um sich dann aber erneut in positiver Richtung zu bewegen. Hierzu sind in Abb. 4.27 die kritischen Werte  $k_c(Re)$ ,  $\omega_c(Re)$  und die hieraus resultierenden Phasengeschwindigkeiten  $w_{ph,c}(Re)$  der  $M = 2$  SPI aufgetragen. Die Beeinflussung von  $Re$  auf die kritischen Werte der Wellenzahl  $k_c$  ist gut aus Abb. 3.21 ersichtlich.

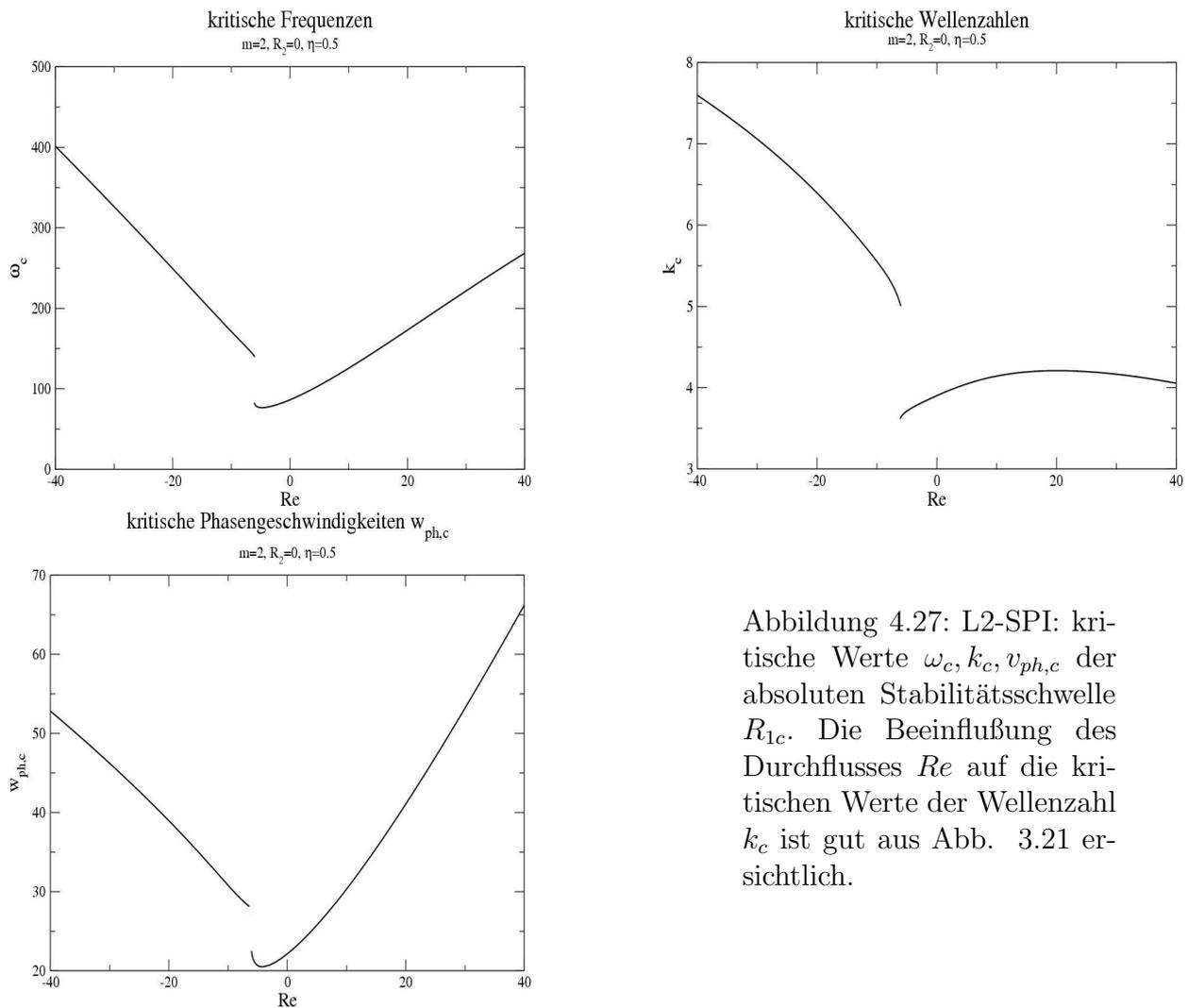


Abbildung 4.27: L2-SPI: kritische Werte  $\omega_c$ ,  $k_c$ ,  $v_{ph,c}$  der absoluten Stabilitätsschwelle  $R_{1c}$ . Die Beeinflussung des Durchflusses  $Re$  auf die kritischen Werte der Wellenzahl  $k_c$  ist gut aus Abb. 3.21 ersichtlich.

Wie darin zu erkennen verschiebt sich die kritische Wellenzahl  $k_c$ , von positiven  $Re$  kommend, zunächst zu kleineren Werten, bis der einzelne 'Berg' in den Eigenwertflächen unterhalb der  $\gamma = 0$ -Ebene zu liegen kommt. Ab nun wachsen die  $k_c$  für kleinere  $Re$  erneut an. Die aus dem Quotienten von Frequenz  $\omega_c$  und Wellenzahl  $k_c$  erhaltene Phasengeschwindigkeit  $v - ph, c$  zeigt eine ähnliches Verhalten wie die Frequenzen. Mit zunehmendem Ge-

genblasen nimmt  $v_{ph,c}$  ab, um ab dem vorhandenen Sprung in den marginalen Kurven bei  $Re \approx 6.2$  erneut anzuwachsen. Dabei ist die Phasengeschwindigkeit immer positiv, trotz immer stärkerem Gegenblasen. Hierzu ist eine weitere genauere Untersuchung der Strukturen notwendig.

Einen guten Überblick im Bezug auf die konvektiven und absoluten Stabilitätsschwellen der L2-SPI liefert eine Kombination der beiden zuvor diskutierten Abb. 4.24 und 4.25 in Abhängigkeit der Parameter  $R_2$  und  $Re$ . Rote Kurven bzw. Flächen in Abb. 4.28 repräsentieren die konvektive Stabilitätsgrenze (vgl. Abb. 4.6 und 4.7), während es sich bei den blauen um die konvektiv-instabilen Schwellen handelt. Wie bereits in Abb. 4.24 gesehen existieren für  $R_2 > 0$  noch keine konvektiv-instabilen Schwellen. Erst für Kontrollparameter  $R_2 = 23$ ,  $Re = -6$  gelangt das System erstmals in den absolut instabilen Bereich. Hier liegt der Fußpunkt bzw. die Spitze des sich aufweitenden Gebietes absoluter Instabilität. Mit zunehmendem  $R_2$  weitet sich dieser Bereich erkennbar auf (vgl. auch Abb. 4.10). In Anlehnung an die Form dieses sich aufweitenden Gebietes wird dies von nun an als 'AH-Horn'<sup>2</sup> bezeichnet.

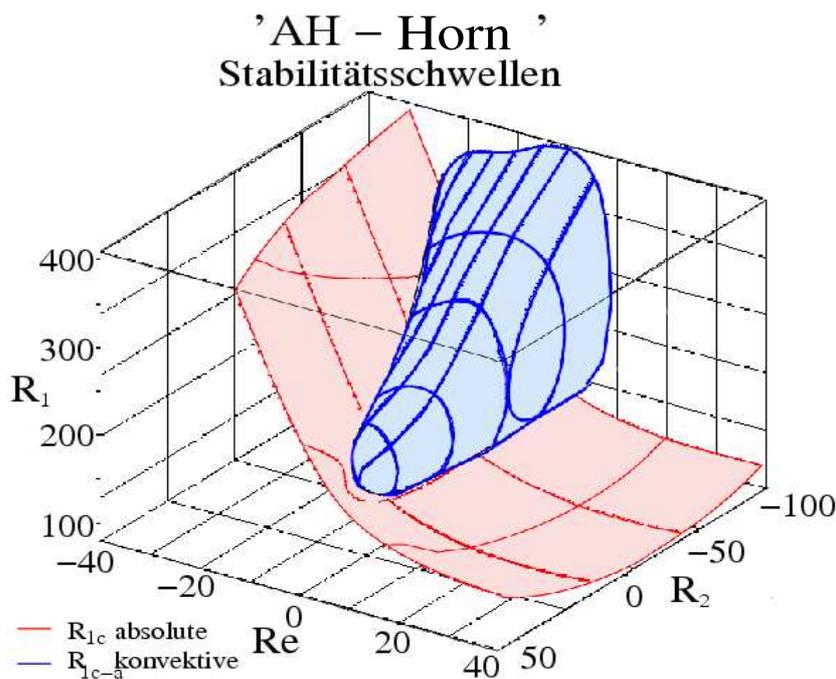


Abbildung 4.28:  
'AH-Horn':  
Absolute und konvektiv-instabile Stabilitätsschwellen einer L2-SPI als Funktion von  $Re$  und der Rotation  $R_2$  für  $\eta = 0.5$

Zum Abschluß der Diskussion der verschiedenen Stabilitätsschwellen sei aber nochmals ausdrücklich auf die Bedeutung der geschlossenen bzw. einseitig offenen Kurven in den Abb. 4.9, 4.10, 4.28 verwiesen. Wie schon zu Anfang erwähnt, handelt es sich um Ergebnisse einer linearen Analyse und demnach sind auch die hier gefundenen höheren Stabilitätsschwellen zu betrachten. Die Ursache für dieses zuvor nicht gesehene Verhalten

<sup>2</sup>Benennung nach seinen Entdeckern Altmeyer und Hoffmann

der konvektiv-instabilen Stabilitätsschwellen liegt in der Aufspaltung der marginalen Kurven und die daraus resultierenden, **nicht-zusammenhängenden** Bereichen, in denen einzelne Moden wachstumsfähig sind. Denn die zur Berechnung der Schwellen  $R_{1c-a}$  zugrunde liegende Sattelpunktsanalyse ist sehr stark von der Topologie der marginalen Fläche abhängig. Es ist ein drastischer Unterschied, ob man sich in einem Parameterbereich befindet, bei dem der gefundene Berg oberhalb der  $\gamma = 0$ -Ebene liegt und demzufolge eine 'Insel' mit wachstumsfähigen Moden existiert, oder diese eben nicht vorliegen. Abhängig davon bezieht sich die Sattelpunktsanalyse auf zwei unterschiedliche Lösungen mit deutlich unterschiedlichen Wellenzahlen.

## 4.9 Resumé

Nachdem die Begriffe der konvektive und absoluten Instabilität voneinander abgegrenzt wurden die lineare Analyse für lokalisierte Störungen dargestellt und diese mit Hilfe der Ginzburg-Landau-Näherung und den linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen ausgewertet. Hierbei traten – analog zu den linearen Koeffizienten Sprünge – in den konvektiven Stabilitätsschwellen  $R_{1c}$  auf. Diese lassen sich auf die komplexe Topologie der marginalen Stabilitätsflächen zurückzuführen (Abschnitt 3.2). Darüber hinaus zeigen jedoch L2-SPI für gewisse Parametersätze geschlossene Kurven der absolut-instabilen Stabilitätsschwellen  $R_{1c-a}$  (Abb. 4.10 und 4.9). Im Gegensatz zu den 'Inseln' aus Kapitel 3 liegt hier innerhalb der 'Inseln' **absolute Instabilität** vor. Dies ist eine Folge des Auftretens eines zweiten Sattelpunktes innerhalb der komplexen Wellenzahlebene, deren relative Lage zueinander und zur  $\gamma = 0$ -Fläche von der Wahl der Kontrollparameter abhängt (Abb. 4.19). Für wachsenden Kontrollparameter  $R_1$  ist es möglich das System aus dem Zustand absoluter Instabilität zurück in den konvektiv-instabilen Zustand zu treiben. Im Allgemeinen fällt die außergewöhnliche Topologie des absolut instabilen Bereichs im dreidimensionalen Kontrollparameter Raum auf – Abb. 4.28 zeigt diesen in Form eines 'Horn'. Dies ist eine gegenüber TVF und 1-SPI vollkommen neue Erscheinung.

# Kapitel 5

## Fronten

### 5.1 Klassifikation von Fronttypen

Wie in den vorangegangenen Abschnitten 4.2 und 4.3 gesehen, lässt sich mit Hilfe der Sattelpunktsbedingung (4.6), sowie der Wachstumsbedingung (4.7) die Schwelle zwischen konvektiver und absoluter Instabilität  $\mu_{c-a}$  berechnen. Durch Fixieren einer Front des Störwellenpaketes im Laborsystem ergab sich hieraus die Bestimmungsgleichung (4.3) für den Sattelpunkt  $Q_s$  und daraus schließlich  $\mu_{c-a}$ .

Um nun entsprechend die Frontgeschwindigkeiten  $v_s$  zu erhalten kann man sich ebenfalls dieser Methode bedienen, indem diesmal aber  $\mu$  fixiert wird. Im vorherigen Abschnitt wurde  $v$ , d.h. die Front selbst fixiert, um die Schwelle im Laborsystem zu ermitteln. Somit ergeben sich analog zu Gleichung (4.6) die entsprechenden Bedingungen des Sattels  $Q_s$  und der Frontgeschwindigkeiten  $v_s$ :

$$\left. \frac{\partial \Sigma(Q)}{\partial Q} \right|_{Q_s, v_s} = 0, \quad Re[\Sigma(Q_s)]|_{v_s} = 0 \quad (5.1)$$

Die zu untersuchenden Fronten besitzen analog zu Gleichung (4.4) unter Ausnutzung der Sattelpunktmethode folgende Form:

$$\vec{X}(z, t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \propto e^{\sigma(Q_s)t + iQ_s z} \quad (5.2)$$

(mit dem Eigenwert:  $\sigma = \gamma - i\omega$  und Sattelpunkt:  $Q_s = k_s - iK_s$ )

Aus (5.2) ergibt sich hieraus eine lokale Variation der Einhüllenden gemäß  $e^{K_s}$  (vgl. Abb. 5.1).

Somit sind die beiden folgenden Fronttypen zu unterscheiden: (Hierbei ist darauf zu achten, wie + und – Front in der verschiedenen Literatur festgelegt sind.) Die hier verwendete Notation entspricht derjenigen von [32] und [34]

#### 1. + Front

In diesem Fall ist  $K_s > 0$  (d.h. die Amplitude der Einhüllenden wächst an), so dass eine Störung bei  $z = -\infty$  aus dem Grundzustand herauswächst (Abb. 5.1a).

## 2. – Front

Im Gegensatz zur + Front handelt es sich hierbei um eine Störung die für  $K_s < 0$  (Amplitudenabnahme der Einhüllenden) bei  $z = \infty$  aus dem Grundzustand anwächst (Abb. 5.1b).

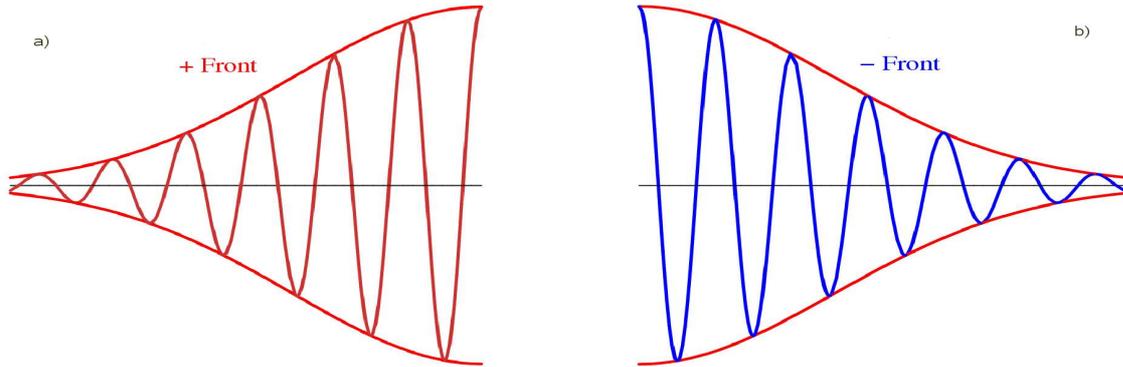


Abbildung 5.1: Qualitative Darstellung der beiden unterschiedlichen Fronttypen; links: +Front; rechts: –Front.

Im weiteren sollen die beiden Fronttypen mit den entsprechenden Indizes  $\pm$ , wie oben festgelegt, unterschieden werden, was der lokalen Variation des Profils entspricht. Ein allgemeines Wellenpaket der Störung, wie im vorherigen Abschnitt diskutiert (vgl. Abb. 4.2) besteht hinreichend weit von dessen Zentrum aus zwei Fronten. Einer + Front links des Zentrums und einer entgegengesetzt wandernden – Front rechts davon. Dies bedeutet aber, dass sich für jede Parameterkombination mittels Gleichung (5.1) zwei Lösungen ergeben, jeweils eine für die + und eine für die – Front.

## 5.2 Ermittlung der Frontpropagationen

Analog der Berechnung der Wachstumsschwelle in Abschnitt 4.3 kann man die Dispersionsrelation

$$\sigma(\mu, Q) = \frac{\mu}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} Q^2 - i \left( \delta k w_g - c_0 \frac{\mu}{\tau_0} + c_1 \frac{\xi_0^2}{\tau_0} Q^2 + \omega_c \right) \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

der linearen Amplitudengleichung (3.5) verwenden. Hieraus ergeben sich nach einfacher, aber etwas länglicher Rechnung, unter Ausnutzung von (5.1) die folgenden Fronteigenschaften

ten:

$$K_{s,\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{(1+c_1^2)\xi_0^2}} \quad (5.5)$$

$$k_{s,\pm} = k_c - c_1 K_{s,\pm} \quad (5.6)$$

$$v_{s,\pm} = w_g - 2(1+c_1^2)\frac{\xi_0^2}{\tau_0} K_{s,\pm} \quad (5.7)$$

$$\gamma_{s,\pm} = -v_{s,\pm} K_{s,\pm} \quad (5.8)$$

$$\omega_{s,\pm} = \omega_c + (k_{s,\pm} - k_c)w_g + (c_1 - c_0)\frac{\mu}{\tau_0} \quad (5.9)$$

Die beiden unterschiedlichen  $\pm$  Lösungen ergeben sich aufgrund der Tatsache, dass die Dispersionsrelation  $\sigma(\mu, Q)$  (5.3) quadratisch von  $Q$  abhängt und daraus entsprechend zwei Lösungen resultieren. Dabei beschreiben obige Fronteigenschaften die folgenden Größen:  $K_s :=$  axiale Wachstumsrate,  $k_s :=$  axiale Wellenzahl,

$v_s :=$  Frontgeschwindigkeit,  $\gamma_s :=$  zeitliche Wachstumsrate,  $\omega_s :=$  Frontfrequenz;

Um Verwechslungen mit den Frontfrequenzen  $\omega_s$  auszuschließen werden die Frontgeschwindigkeiten mit  $v_s$  bezeichnet, auch wenn es sich konsequenterweise um  $w_s$  handelt.

Analog zur Herleitung der Stabilitätsschwelle zwischen konvektiver und absoluter Instabilität (vgl. Abschnitt 4.3) hat man natürlich auch im hier vorliegenden Fall von Fronten die Möglichkeit die Dispersionsrelation  $\sigma(Q)$  mittels Lösbarkeitsbedingung (2.33) aus den vollen linearen Navier-Stokes-Gleichungen (2.22) zu erhalten. Abermals müssen nun die Bedingungen zur Berechnung von  $Q_s$  und  $v_s$  numerisch implementiert werden und die Cauchy-Riemann-Gleichung in (5.1) ausgenutzt werden.

$$Re[\Sigma(Q_s)]|_{v_s} = 0 \quad (5.10)$$

$$0 = \left. \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial k} \right|_{Q_s} \quad (5.11)$$

$$v_s = - \left. \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial K} \right|_{Q_s} \quad (5.12)$$

$$= - \frac{\gamma(Q_s)}{K_s} \quad (5.13)$$

Das Problem besteht also abermals in dem Auffinden einer Nullstelle  $(k_s, K_s)$  der Funktion

$$F(k, K) := \begin{pmatrix} \frac{\gamma(Q)}{K} - \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial K} \\ \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{K} - \frac{\partial}{\partial K} \\ \frac{\partial}{\partial k} \end{pmatrix} \gamma(Q) \quad (5.14)$$

mittels des Newton-Raphson-Verfahrens [Anhang], wodurch sich  $v_s$  unmittelbar aus (5.12) ergibt. Die Vor- und Nachteile sind die gleichen wie schon zuvor bei der Schwellenbestimmung (vgl. Abschnitt 4.3) diskutiert.

### 5.3 Symmetrieoperationen von $\pm$ Fronten für R/L-SPI

Die wichtigsten Symmetrieoperationen der  $\pm$  Fronten existieren bei verschwindendem Durchfluss  $Re = 0$ . In diesem Fall ist die  $+$  Front einer R-SPI spiegelsymmetrisch zur  $-$  Front einer L-SPI (vgl. Abb. 5.2a). Gleiches gilt umgekehrt, d.h. die  $-$  Front einer R-SPI ist das Spiegelbild einer  $+$  Front einer L-SPI. Die dieses Verhalten beschreibenden Symmetrieoperationen lassen sich wie folgt zusammenfassen.

Allgemeine Symmetrien der  $\pm$  Fronten von L- und R-SPI für  $Re = 0$ :

$$[K_s, v_s, \omega_s]_+^{R-SPI} = -[K_s, v_s, \omega_s]_-^{L-SPI}, \quad k_{s,+}^{R-SPI} = k_{s,-}^{L-SPI} \quad (5.15)$$

$$[K_s, v_s, \omega_s]_+^{L-SPI} = -[K_s, v_s, \omega_s]_-^{R-SPI}, \quad k_{s,+}^{L-SPI} = k_{s,-}^{R-SPI} \quad (5.16)$$

(Indizes  $\pm$  charakterisieren die beiden unterschiedlichen Fronttypen) Es ist jedoch wichtig, dass auch bei  $Re = 0$ , wo die Geschwindigkeiten von  $+$  und  $-$  Fronten zusammenfallen, diese aber **nicht** identisch Null sind, sondern leicht ins positive verschoben sind, was allerdings erst bei einer höheren Auflösung dieses Bereiches zu erkennen ist. Dies basiert auf der bereits in dem früheren Kapitel beschriebenen Verhalten, dass  $M \neq 0$ -Strukturen eine bevorzugte Propagationsrichtung besitzen und somit Symmetriebrechung vorliegt.

Diese wird, wie in den Abb. 5.2 und 5.3 zu erkennen, mit zunehmendem Durchfluss verstärkt, so dass die entsprechenden Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}$  anwachsen. Da bei der Berechnung der Fronteigenschaften unter anderem auch die Ginzburg-Landau-Näherung ausgenutzt wurde, so müssen sich die schon in Abschnitt 3.1.3 angesprochenen Symmetrieoperationen bzgl. der linearen Koeffizienten ebenfalls bemerkbar machen. Mit diesen und den Fronteigenschaften (5.5)-(5.9) gelten allgemein folgende weitere Symmetrien:

Symmetrien der  $\pm$  Fronten von L- und R-SPI für  $Re = 0$  bei Benutzung der GLN:

$$K_{s,+}^{R-SPI} = -K_{s,-}^{R-SPI} = K_{s,-}^{L-SPI} = K_{s,+}^{L-SPI} \quad (5.17)$$

$$-\omega_{s,+}^{R-SPI} = -\omega_{s,-}^{R-SPI} = \omega_{s,-}^{L-SPI} = \omega_{s,+}^{L-SPI} \quad (5.18)$$

## 5.4 Frontpropagation bei externem Durchfluss $Re$

In den folgenden Abb. 5.2 und 5.3 sind die Ergebnisse der im Abschnitt 5.2 theoretisch hergeleiteten Fronteigenschaften für den Fall einer L2-SPI für unterschiedliche Durchflüsse  $Re = 0, 5, 10, 15, 20$  bei  $R_2 = 0$  und  $\eta = 0.5$  graphisch dargestellt. Aufgetragen sind sowohl Real- als auch Imaginärteil des komplexen Sattelpunktes  $Q_s = k_s - iK_s$ , sowie die Frontgeschwindigkeiten  $v_s$  und deren Frequenzen  $\omega_s$  bezüglich ihrer Abweichung  $\mu$  zum jeweils kritischen Wert  $R_{1c}$ . Dabei stellen die orangenen Kurven die Ergebnisse der +Front, und die blauen entsprechende der –Front dar. Gestrichene Linien sind Resultate der Ginzburg-Landau-Näherung GLN erhalten, wohin gegen die durchgehenden Linien aus der Lösung der linearisierten NSE resultieren.

Anhand der Abb. 5.2 und 5.3 lassen sich wichtige Erkenntnisse im Bezug auf L2-SPI gewinnen. Augenscheinlich ist die Ginzburg-Landau-Näherung für Spiralen  $|M| > 1$  nur noch unzureichend geeignet das Verhalten der Fronten zu beschreiben. Dies zeigt sich in der doch sehr drastischen Abweichung der aus dieser Näherung gewonnenen Kurven im Bezug auf die Lösungen aus den vollen linearen Gleichungen und zwar in allen in den Abb. 5.2 und 5.3 dargestellten Größen. Eine Übereinstimmung beider Verfahren ist nur unmittelbar in der Nähe des onsets  $\mu \approx 0$  gegeben. Ähnliches wurde auch schon in früheren Arbeiten bei der Untersuchung von TVF und 1-SPI [32] festgestellt. Dabei trat eine deutliche Abweichungen der unterschiedlichen Verfahren allerdings nur in einzelnen Größen, wie den Frequenzen  $\omega_s$  und der reellen Wellenzahl  $k_s$  und dies auch erst bei deutlich überkritischen  $\mu$  Werten als im hier vorliegenden Fall auf.

Es läßt sich also festhalten, dass die Ginzburg-Landau-Näherung zur Beschreibung von 2-SPI nicht wirklich geeignet ist.

Dies wird bei Betrachtung der Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}$  bzgl.  $Re = 0$  und  $Re = 5$  in Abb. 5.2 am deutlichsten. Nicht nur die Werte aus der Ginzburg-Landau-Näherung sind betragsmäßig 'viel zu groß', sondern sie können ein wesentliches Verhalten überhaupt nicht beschreiben. Während die Geschwindigkeiten  $v_+(Re = 0, 5)$  nach den NSE nach anfänglichem abfallen mit zunehmendem Abstand vom kritischen Wert **erneut anwachsen und sogar wieder zu positiven Werten zurückkehren** (siehe auch Abb. 5.5), so ist in den  $v_+$  der GLN keinerlei ähnliches Verhalten zu erkennen. Hierbei wächst die Geschwindigkeit der +Front mit zunehmendem Abstand zum kritischen Punkt betragsmäßig weiter an. Jedoch gerade dieses Verhalten, die Änderung des Vorzeichens der Frontgeschwindigkeit  $v_+$  ist von entscheidender Bedeutung, da hierdurch ein Übergang in einen anderen Stabilitätsbereich gekennzeichnet ist. Zurück aus einem Bereich in dem das System absolut instabil war in einen, in dem es erneut konvektiv-instabil ist. Nach den in Abschnitt 4.5 beschriebenen Verhalten der Stabilitätsschwellen (u.a. Abb. 4.9 und 4.10 muss eine der beiden Fronten dieses Verhalten aufweisen, da ansonsten kein Übergang zurück in den konvektiv-instabilen Bereich möglich wäre. Diese Schwellen ergaben sich ja gerade durch die Fixierung einer der beiden Fronten ( $v_s = 0$ ).

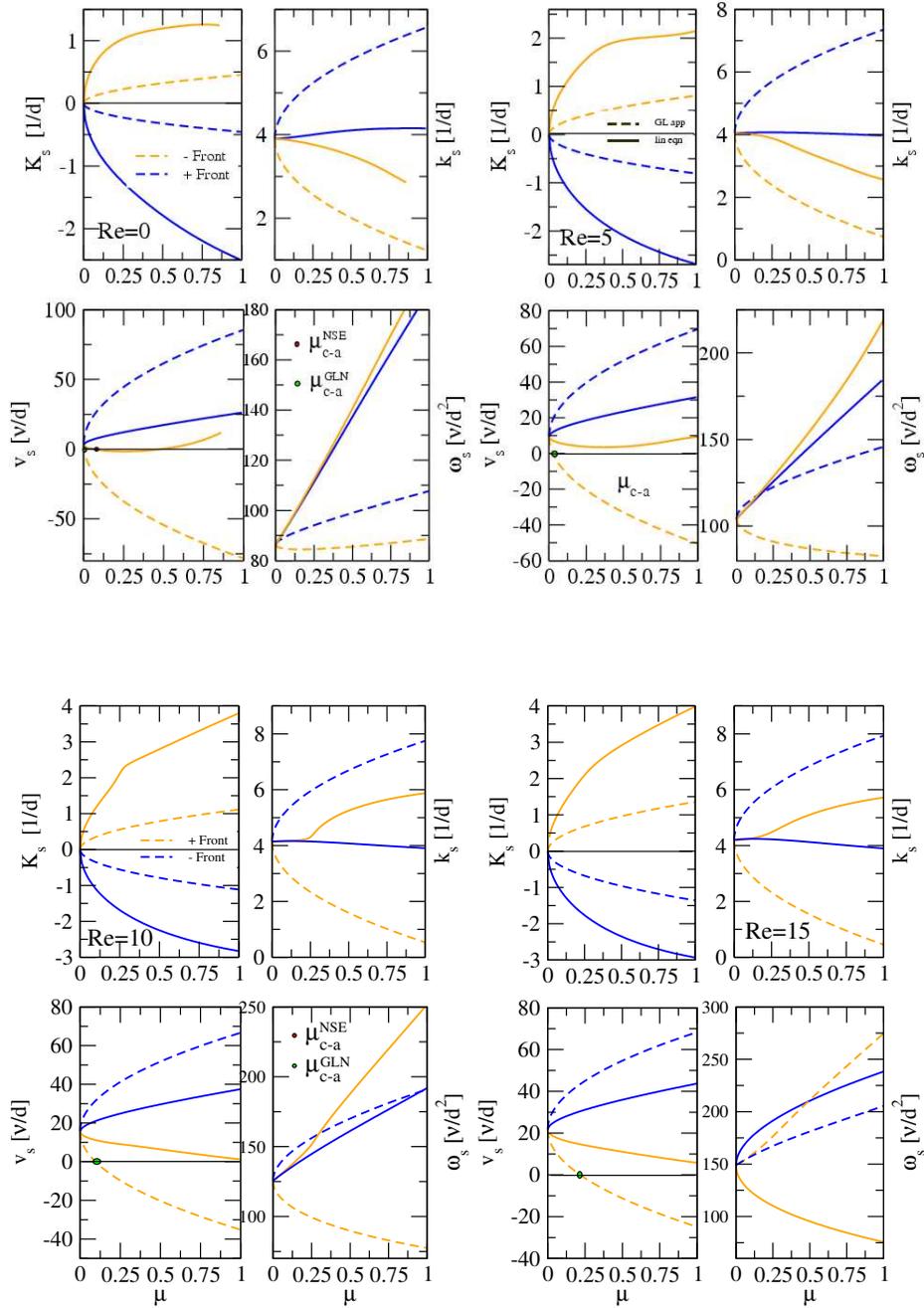


Abbildung 5.2: Fronteigenschaften  $K_{s,\pm}$ ,  $k_{s,\pm}$ ,  $v_{s,\pm}$ ,  $\omega_{s,\pm}$  einer L2-SPI als Funktion von  $\mu$  mittels *Ginzburg-Landau-Näherung* (GLN) (gestrichelte Linien) und als Lösung der *vollen Linearen Gleichungen* (NSE) (durchgehende Linien) für  $\eta = 0.5$ ; orange: +Front; blau: -Front; Kontrollparameter:  $R_2 = 0$ . Mit eingetragen sind die überkritischen Werte  $\mu_{c-a}^{GLN}$ ,  $\mu_{c-a}^{NSE}$ , der beiden Verfahren ab denen das System absolut instabil ist. Interessant ist hierbei, dass im Falle  $Re = 5$  kein  $\mu_{c-a}^{NSE}$  existiert, da die +Front keinen Nulldurchgang besitzt.

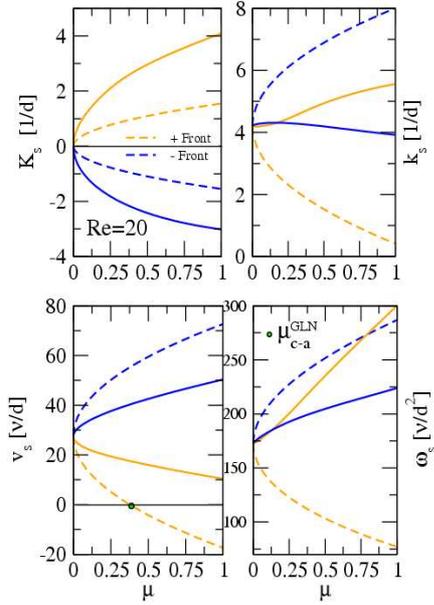


Abbildung 5.3: Fronteigenschaften  $K_{s,\pm}, k_{s,\pm}, v_{s\pm}, \omega_{s,\pm}$  einer L2-SPI als Funktion von  $\mu$  mittels *Ginzburg-Landau-Näherung* (GLN) (gestrichene Linien) und als Lösung der *vollen Linearen Gleichungen NSE* (durchgehende Linien) für  $\eta = 0.5$ ; orange: +Front; blau: -Front; Kontrollparameter:  $R_2 = 0$ .

Betrachtet man sich in Abb. 5.2 den Fall  $Re = 5$ , so erkennt man eine weitere Besonderheit. Hierbei verlaufen sowohl die + als auch die -Front immer im positiven Bereich. Die Geschwindigkeit der +Front nimmt mit Zunahme zu überkritischeren Werten zunächst wie gewohnt ab. Entscheidend ist aber, dass sie keinen Nulldurchgang besitzt, bevor sie erneut anwächst. Somit existiert hier auch kein  $\mu_{c-a}^{NSE}$ , so dass das System fortwährend im konvektiv-instabilen Zustand verbleibt.

Desweiteren bleibt festzuhalten, dass die Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}$  der 2-SPI deutlich oberhalb derer von TVF und 1-SPI liegen. Hierzu sind in Abb. 5.4 die Geschwindigkeiten  $v_{\pm}$  beider Fronttypen für TVF, L1- und L2-SPI bei festem  $Re = 10$  gegen  $\mu$  aufgetragen. Hierbei handelt es sich um Ergebnisse aus den NSE. In der weiteren Arbeit soll, wenn nicht ausdrücklich erwähnt, immer  $\mu := \mu^{NSE}$  gelten. Bei TVF und L1-SPI betragen die Frontgeschwindigkeiten am onsets ( $\mu = 0$ ):  $v_{\pm}(M = 0) \approx 12.16$  und  $v_{\pm}(M = 1) \approx 12.93$ , in Übereinstimmung mit [32] und liegen somit in gleicher Größenordnung. Demgegenüber ist der Wert für die L2-SPI mit  $v_{\pm}(M = 2) \approx 15.68$  doch deutlich größer. Dieser bereits am onset deutlich höhere Wert spiegelt sich auch im weiteren Verlauf der Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}$ , mit zunehmender Entfernung vom onset wieder. So liegen die beiden Werte bei denen TVF und L1-SPI vom konvektiv-instabilen in den absolut instabilen Bereich (vgl. auch Abschnitt 4.4) übergehen mit  $\mu_{c-a}(M = 0) \approx 0.528$  und  $\mu_{c-a}(M = 1) \approx 0.604$  ebenfalls in gleicher Größenordnung. Für den Fall der L2-SPI verschiebt sich dieser zu sehr viel stärker überkritischen Werten ( $\mu > 1$ ) außerhalb des hier dargestellten Bereiches hin.

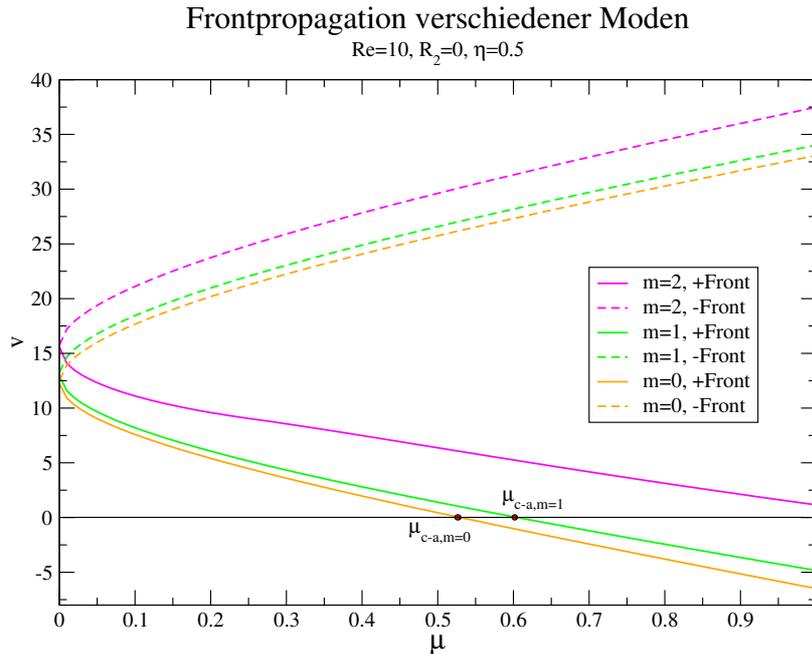


Abbildung 5.4: Vergleich der Frontgeschwindigkeiten unterschiedlicher Strukturen  $M = 0, 1, 2$  erhalten aus den vollen linearen Gleichungen; durchgehende Linien: +Fronten, gestrichen: -Fronten;  $\eta = 0.5, Re = 10, R_2 = 0$ .

## 5.5 Propagationsrichtungen und deren Auswirkungen

Entscheidend für die Propagationsrichtungen von + und - Front, oder noch vielmehr deren relative Bewegung zueinander ist, wie schon beschrieben, die Wachstumsschwelle  $\mu_{c-a}$ , da diese die Grenze zwischen absoluter- und konvektiver Instabilität darstellt. Dabei mißt  $\mu$  wie üblich die Abweichung bzgl. der kritischen Reynoldszahl  $R_{1c}$  des inneren Zylinders, so dass im Grenzfall  $\mu \rightarrow 0$  die Eigenschaften von + und - Front, gerade auf die kritischen Werte reduziert werden und demzufolge zusammenfallen (vgl. z.B. Abb. 5.4:  $\mu = 0$ ). In diesem Fall befindet man sich 'at onset' und es gilt  $v_{s+} = v_g = v_{s-}$ . Erst im Bereich  $\mu > 0$  können sich überhaupt die beiden Sattelpunkte  $Q_{s,\pm}$  (5.1) ausbilden, die dann zu den Lösungen der + bzw. - Front führen. Solange  $\mu < \mu_{c-a}$  gilt (vgl. Abb. 5.2 und 5.3), ist das System konvektiv instabil, da sich die beiden Fronten in gleicher Richtung durch das System bewegen und somit jede Störung nach endlicher Zeit eliminiert wird. Formal bedeutet dies ein gleiches Vorzeichen in den Frontengeschwindigkeiten  $v_{\pm}$ . Diese, wie auch alle nun folgenden Aussagen über die Frontgeschwindigkeiten beziehen sich, wenn nicht ausdrücklich erwähnt, auf das Laborsystem LS. Die Vorzeichengleichheit in diesem ändert sich, sobald  $\mu > \mu_{c-a}$  gilt (vgl. Abb. 5.4). Ab jetzt besitzen  $v_{\pm}$  unterschiedliche Vorzeichen, was bedingt, dass sich Störungen fortan im kompletten System ausbreiten können und dieses somit absolut instabil wird. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts sind die jeweiligen Schwellenwerte  $\mu_{c-a}$  in den Abb. 5.2,5.3,5.4 mit aufgenommen. Dies bedeutet etwa für den Fall  $R_2 = 0, Re = 0$  der L2-SPI aus Abb. 5.2, dass sich das System für alle  $\mu < \mu_{c-a}^{NSE} = 0.058$  (gerade hier liegt der Vorzeichenwechsel in  $v_+$ ) im konvektiv instabilen Bereich befindet. Dieser charakterisiert somit den maximal überkritischen Wert  $R_1$ , unterhalb dessen noch alle ins System eingebrachten Störungen wieder herausgeblasen werden.

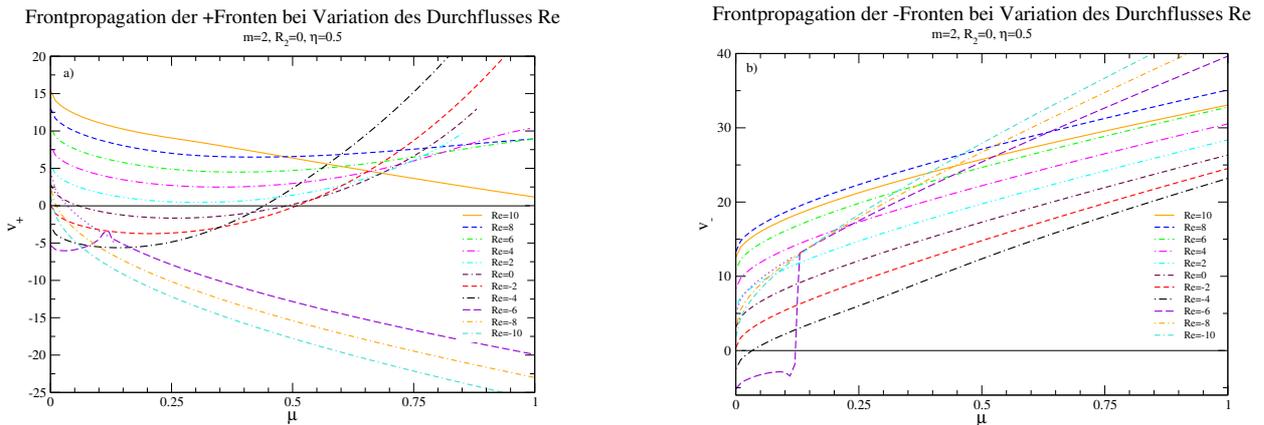


Abbildung 5.5: Frontgeschwindigkeiten  $v_+$  der +Fronten (a) und  $v_-$  der -Fronten (b) einer L2-SPI bei Variation von  $Re$ .  $R_2 = 0$ ,  $\eta = 0.5$

Im hier gewählten Beispiel ergibt sich  $R_1 \approx 135.1$ , gleichbedeutend damit, dass man sich  $\approx 6\%$  überkritisch befindet.

Wie bereits kurz in 5.4 angesprochen zeigen die Frontgeschwindigkeiten  $v_+$  bei kleineren Durchflüssen  $Re$  im Bereich  $-10..10$  ein vollkommen anderes und bei TVF und 1-SPI nicht festzustellendes Verhalten. Dies bedarf einer weiteren Untersuchung. Hierzu sind in der Abbildung 5.5 die Frontgeschwindigkeiten der beiden Fronttypen + und - bzgl. ihrer Abweichung  $\mu$  vom kritischen Wert  $R_{1c}$  bei unterschiedlichen Durchflüssen  $Re = -10..10$ , mit  $\Delta Re = 2$  aufgetragen. Im Bereich von  $Re = 10..2$  ist sowohl die Frontgeschwindigkeit  $v_+$  der +Front, wie auch die zugehörige  $v_-$  der -Front positiv. Somit befindet sich das System, wie bereits beschrieben im konvektiv-instabilen Bereich. Bei  $Re = 0$  befindet sich das System zunächst ( $\mu < 0.058$ ) ebenfalls in diesem. Bei  $\mu = 0.058$  ändert sich aber die Propagationsrichtung der +Front, während die -Front in gleicher Richtung fortläuft. Ab jetzt befindet sich das System im Bereich der absoluten Instabilität, da beide Fronten einer ins System eingebrachten Störung in unterschiedliche Richtungen wandern. Bis hierher ist dies noch kein außergewöhnliches Verhalten, sondern vielmehr die gewohnte und normale Abfolge der Stabilitätsbereiche. Das Entscheidende und Interessante ist nun, dass sich das **Vorzeichen von  $v_+$  mit zunehmend steigendem Abstand vom onset erneut umkehrt, bei weiter gleichbleibendem Vorzeichen von  $v_-$** . Das System vollzieht somit, wie aus 4.5 bereits bekannt, einen 'Rückschritt' aus einem absolut instabilen in einen erneut konvektiv-instabilen Bereich. Im Fall  $Re = 0$  geschieht dies bei  $\mu \approx 0.49$ . Auch bei weiter steigendem Gegendurchfluss  $Re < 0$  zeigt sich dieses erneute Verlassen des absoluten Instabilitätsbereiches. Die sehr drastische Änderung, also der Knick, bzw. Sprung in den Abb. 5.5 der bei  $Re \approx -6$  auftritt, ist auf die in dem früheren Abschnitt 3.2 bereits dargestellte und ausführlich diskutierte Tatsache der Aufspaltung der marginalen Kurven bei gewis-

sen Parametersätzen in zwei nicht zusammenhängende Teilbereiche zurückzuführen. Da auf der Abszisse gerade die Abweichung  $\mu$  vom onset aufgetragen ist, so muß sich eine abrupte Änderung des kritischen Wertes  $R_{1c}$  natürlich auf den Verlauf der Kurven auswirken.

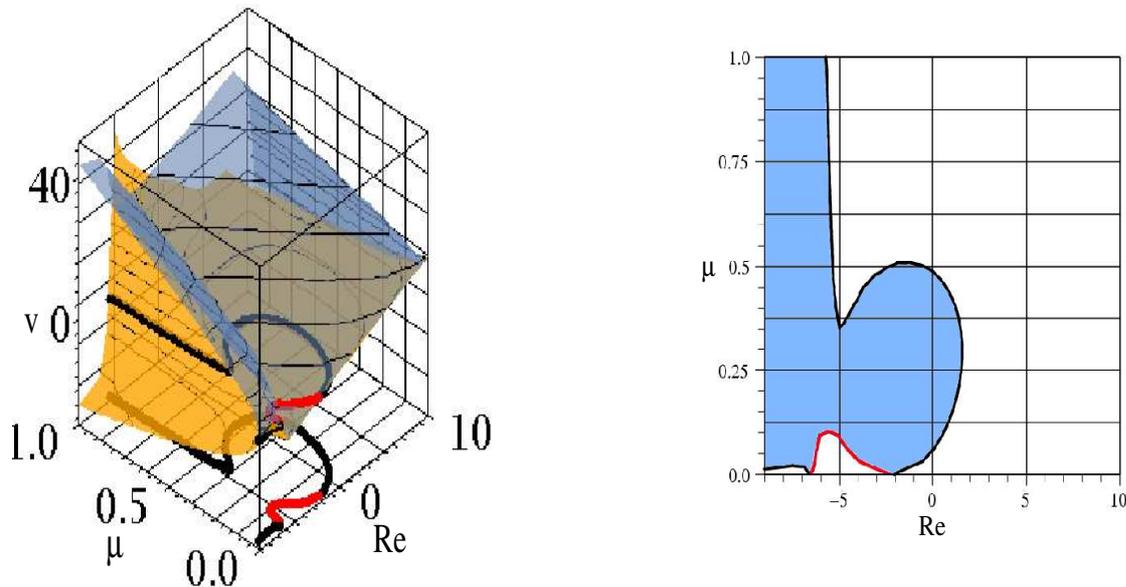


Abbildung 5.6: links: Frontgeschwindigkeiten  $v_+$  und  $v_-$  einer L2-SPI bei Variation von  $Re$  und  $\mu$  für  $\eta = 0.5$ . (+Front: orange, -Front: rot) rechts: Isolinien  $v_- = 0 = v_+$  (Frontstillstand, +Front: schwarz, -Front: rot); hell blau markiert ist der Bereich, in dem die beiden Fronten in entgegengesetzte Richtungen propagieren und das System somit absolut instabil ist. Kontrollparameter:  $R_2 = 0$ . Die drastische Änderung bei  $Re \approx -6$  beruht auf der aus den Abb. 3.18 und 3.21 bekannten Aufspaltung der marginalen Kurve.

Zur Veranschaulichung der Frontpropagationen und der Bereiche in denen das System dieses besondere Verhalten vom absolut instabilen zurück zum konvektiv-insabilen Bereich aufweist ist in Abbildung 5.6 die Bewegung der + und -Fronten bei variierendem Durchfluss  $Re = -10..10$  (vgl. Abb. 5.5) zusammen dargestellt. Zusätzlich sind noch die Linien bei denen die Frontgeschwindigkeiten gerade Null betragen ( $v_+$ : schwarz,  $v_-$ : blau) mit aufgenommen. Diese markieren gerade den Punkt, an dem eine Frontgeschwindigkeit ihr Vorzeichen, also ihre Bewegungsrichtung ändert, während die jeweils andere mit gleichem Vorzeichen weiter propagiert. Der Übersicht halber sind diese Linien in Projektion auf

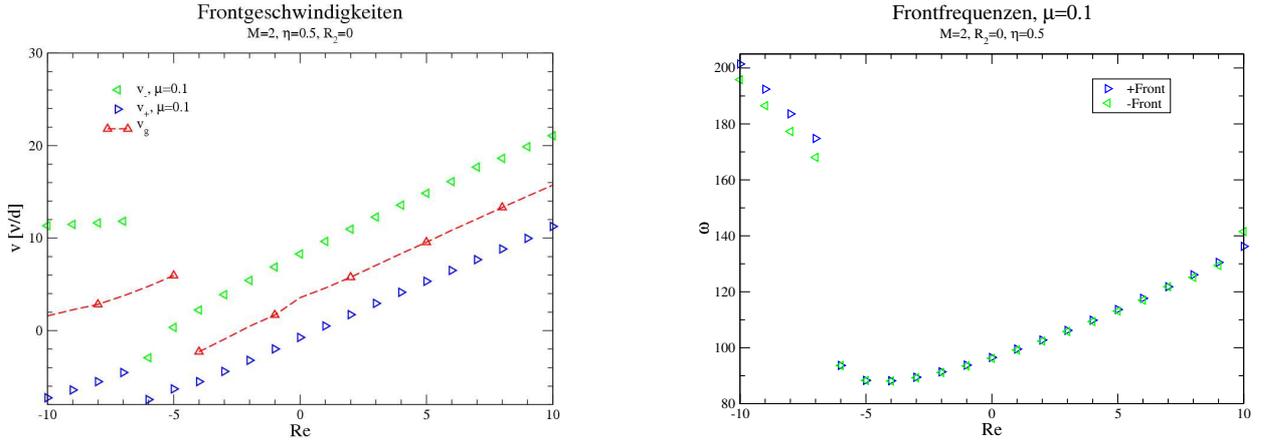


Abbildung 5.7: Links: Gruppen-  $w_g(Re)$  und Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}(Re)$  einer L2-SPI für  $\mu = 0.1$ . Rechts: zugehörige Frontfrequenzen  $\omega_{\pm}$ ;  $R_2 = 0$ ,  $\eta = 0.5$

die  $(\mu, Re)$  Ebene, nebenstehend nochmals separat dargestellt. Im weißen Bereich befindet sich das System im Zustand konvektiver Instabilität, hellblau symbolisiert entsprechend den Bereich absoluter Instabilität. Bewegt man sich von positivem Durchflüssen  $Re = 10$  zu kleineren bis schließlich hin zu negativen  $Re$  (d.h. in Abb. 5.6 von rechts nach links), so kommt man bei  $Re = 2$  erstmals in einen Bereich, in dem das System mit wachsenden  $\mu$  (in Abb. 5.6 von unten nach oben) kurzzeitig absolut instabil (hellblau) wird, um gleich danach aber erneut in den konvektiv-instabilen Zustand (weiß) zurückzukehren. Mit weiter abnehmenden  $Re$  dehnt sich dieser absolute instabile Bereich zunehmend aus, bis er bei  $Re \approx -2$  sein Maximum erreicht, und sich anschliessend bis  $Re \approx 5.5$  verkleinert. Ab diesem Durchfluss kommt nun die aus Abschnitt 3.2 bekannte Aufspaltung der marginalen Kurve zum tragen, so dass sich der absolute Instabilitätsbereich sehr abrupt auf den fast gesamten Bereich ausdehnt. In diesem Bereich ist es nicht möglich genauere Aussagen über die Fronten zu machen.

In Abb. 5.7 sind die Gruppengeschwindigkeiten  $w_g$  einer L2-SPI wie auch die beiden Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}(Re)$  bei 10% überkritischen Werten ( $\mu = 0.1$ ) dargestellt. Zusätzlich sind nebenstehend noch die Frontfrequenzen  $\omega_{\pm}(Re)$  bei gleichem  $\mu$  aufgetragen. Abgesehen von dem schon bekannten Sprung in den einzelnen Kurven fällt auf, dass die Differenz zwischen Gruppengeschwindigkeit  $w_g$  und Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}$  für stark negative Durchflüsse  $Re < -6$  (links des Sprungs) deutlicher größer ist, als bei  $Re > -6$  (rechts des Sprungs). So z.B. gilt bei  $Re = -9$ :  $|\Delta v| = |v_{\pm} - v_g| \approx 9$ , während der Unterschied bei  $Re = 0$  nur noch  $|\Delta v| \approx 5$  beträgt. Entsprechend ergibt sich auch eine deutlich größere Differenz der beiden Frontgeschwindigkeiten  $v_{\pm}$  zueinander. Starkes Gegenblasen  $Re < -6$  bedingt somit eine erhebliche Zunahme der Geschwindigkeiten  $v_{\pm}$ , bzw. eine

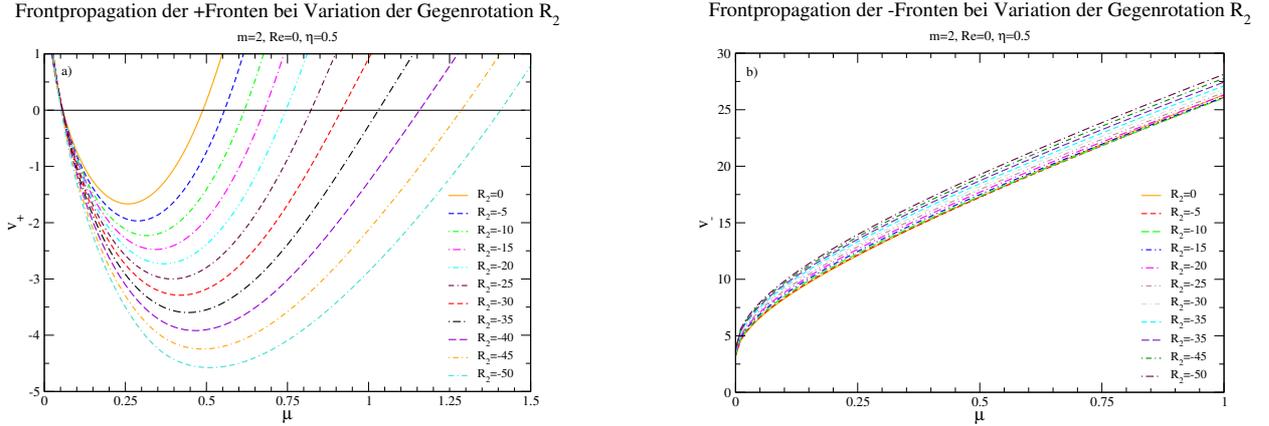


Abbildung 5.8: Frontgeschwindigkeiten  $v_+$  der + Fronten (a)  $v_-$  der –Fronten (b) einer L2-SPI bei Variation von  $R_2$ .  $Re = 0$ ,  $\eta = 0.5$

Erniedrigung der überkritischen Werte  $\mu$  um bestimmte  $v_{\pm}$  zu erreichen. In diesem Parameterbereich ist das System anfälliger für Störungen. Wirft man nun neben den Geschwindigkeiten  $v_{\pm}(Re)$  einen Blick auf die zugehörigen Frontfrequenzen  $\omega_{\pm}(Re)$  so erkennt man ein ähnliches Verhalten wie in den Geschwindigkeiten. Während die Frequenzen  $\omega_{\pm}(Re)$  beider Fronten für  $Re > -6$  nahezu identisch sind und auch mit wachsendem  $Re$  nur sehr langsam auseinanderlaufen, so ist bei  $Re < -6$  doch ein Unterschied  $\Delta\omega \approx 7$  zu sehen. Dies ist analog der Geschwindigkeiten  $v_{\pm}$  auf die starke Korrelation mit dem auferlegten Durchfluss zu erklären. Weitere Rechnungen zu weniger überkritischen Werten  $\mu \approx 0.07$ , bei denen die Differenzen  $|\Delta v|$  in etwa den Werten aus Abb. 5.7 für  $Re > -6$  entspricht, zeigten dass die Frequenzen  $v_{\pm}(Re)$  dann ebenfalls sehr dicht beisammen liegen.

Neben der bislang gezeigten  $Re$  Abhängigkeit des Bereiches in dem + und –Fronten in unterschiedliche Richtungen propagieren und sich das System demzufolge im Bereich absoluter Instabilität befindet existiert weiterhin eine Abhängigkeit bzgl. der Gegenrotation  $R_2$ , sowie des Radienverhältnisses  $\eta$  (vgl. Abschnitt 4.5). Diese sind in Analogie zu Abb. 5.8 aufgetragen.

Anders als bei der Variation von  $Re$  zeigt sich in den Abb. 5.8 und 5.10 für den hier betrachteten Bereich  $R_2 = -50..0$  kein außergewöhnliches Verhalten wie in 5.5. Für den Fall der  $R_2$  Variation bewegt sich die –Front  $\forall R_2$  permanent positiver Richtung, während die +Front nach anfänglich ebenfalls positiver Bewegungsrichtung stockt und in entgegengesetzter Richtung weiterpropagiert. Bei noch weiter überkritischen Werten kommt es schließlich abermals zum Stillstand der +Front und zu einer erneuten Umkehr des Vorzeichens in  $v_+$ . Dieser zweite Vorzeichenwechsel ist dabei sehr stark abhängig von dem gewählten  $R_2$ . Mit betragsmäßig zunehmenden  $R_2$  verschiebt sich dieser zu weiter überkritischen Werten hin (Abb. 5.8 und 5.9). Dabei symbolisiert der in Abb. 5.9 rechts,

hellblau dargestellte Bereich, analog zu Abb. 5.6 den absolut instabilen Zustand des Systems, da hier beide Fronten  $\pm$  in entgegengesetzter Richtung propagieren. Dieser wächst mit zunehmendem  $R_2$  kontinuierlich an. Bereits bei  $R_2 \approx -34$  ist der überkritische Wert, bei dem das System in den konvektiv instabilen Zustand zurückkehrt doppelt so groß wie der zugehörige kritische Wert (d.h.  $\mu = 1$ ) wie auch aus Abb. 5.8 hervorgeht.

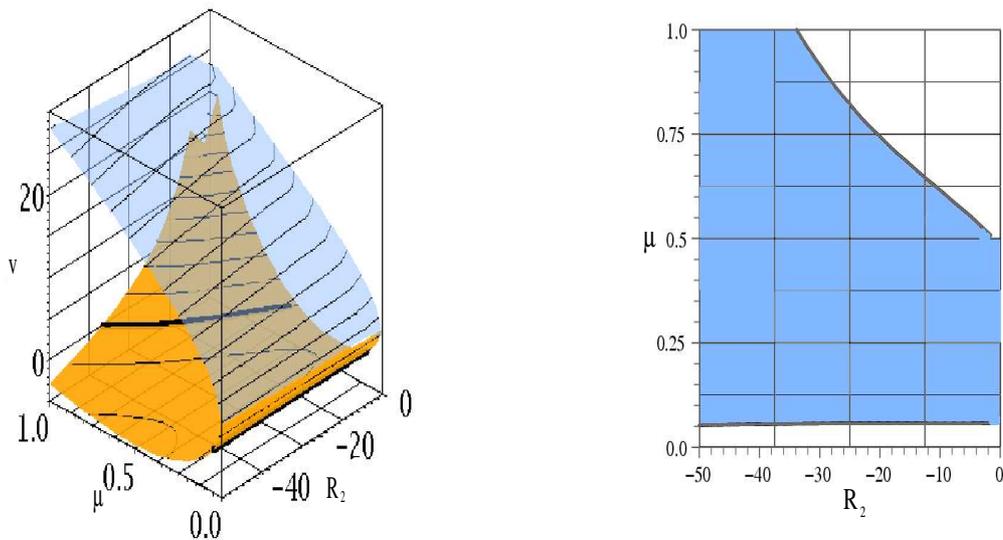


Abbildung 5.9: links: Frontgeschwindigkeiten der  $+$  und  $-$  Fronten einer L2-SPI bei Variation von  $R_2$ . rechts: Isolinie (schwarz) bei Stillstand der  $+$ Front:  $v_+ = 0$ ; hell blau markiert ist der Bereich, in dem die beiden Fronten in entgegengesetzte Richtungen propagieren und demnach das System absolut instabil ist.  $Re = 0$ ,  $\eta = 0.5$

Ähnliches Verhalten wie bei  $R_2$  Variation ist auch bei Änderung des Radienverhältnisses  $\eta$  in Abb. 5.10 feststellbar. Während die  $-$ Fronten ebenfalls permanent in positiver Richtung propagieren, wechselt das Vorzeichen von  $v_+$  der  $+$ Fronten ebenfalls *zweimal*, abhängig von den verwendeten äußeren Parameter, von  $+$  nach  $-$  und zurück. Es bleibt jedoch festzuhalten, dass gerade der überkritische Wert  $\mu_{c-a}$ , der dem zweiten Vorzeichenwechsel entspricht, sehr drastisch von  $\eta$  beeinflusst wird. So ändert sich dieser deutlich von  $\mu \approx 0.61$  bei  $\eta = 0.5$  bis hin zu  $\mu \approx 0.68$  bei  $\eta = 0.55$ . Die entsprechenden Werte für  $\eta = 0.6$  und  $\eta = 0.7$  liegen, insofern überhaupt existent, außerhalb des hier (Abb.

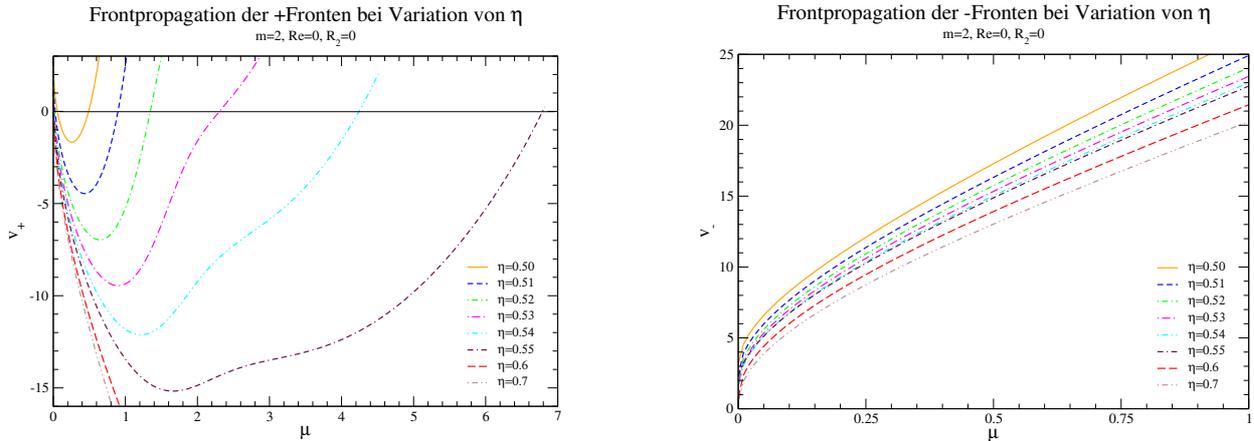


Abbildung 5.10: Frontgeschwindigkeiten  $v_+$  der +Fronten (a)  $v_-$  der -Fronten (b) einer L2-SPI bei Variation von  $\eta$ .  $Re = 0$ ,  $R_2 = 0$

5.10) untersuchten Bereiches ( $\mu \leq 7$ ). Desweiteren zeigen die Kurven der Frontgeschwindigkeiten  $v_+$  in Abb. 5.10 eine deutliche Änderung in ihrer Steigung und Krümmung. Mit Zunahme des Radienverhältnisses  $\eta$  nimmt die Steigung der  $v_+$  Kurven nach Erreichen ihres Minimums erkennbar ab. Weiterhin kommt ab  $\eta = 0.53$  eine zweimalige Änderung in der Krümmung, von links- nach rechts gekrümmt und zurück, hinzu. Es scheint sogar, dass es für  $0.55 < \eta < 0.6$  eine Kurve gibt, bei der ein lokales Maximum existiert.

Um die Ergebnisse der letzten beiden Kapitel und den Zusammenhang bzgl. Frontpropagation  $v_{\pm}$  und Wachstumsschwellen  $\mu_{c-a}$  nochmals deutlich hervorzuheben, sind in Abb. 5.11 die Wachstumsschwellen unterschiedlicher  $\eta$  und exemplarisch hierzu zwei Frontbewegungen, als Schnitt bei  $Re = 0$ , aufgetragen. Bei  $\eta = 0.5$  erkennt man, dass sich beide Fronttypen + und - unmittelbar oberhalb des kritischen Wertes in gleicher (positiver) Richtung bewegen.  $v_+$  und  $v_-$  besitzen gleiches Vorzeichen. Für das System als Ganzes bedeutet dies, dass es sich im konvektiv-instabilen Zustand befindet, was im mittleren Graph daran zu erkennen ist, dass man sich noch unterhalb der zugehörigen Stabilitätsschwelle (orange gestrichelten) befindet ( $\epsilon \approx 0.05$ ). Diese ist ja gerade durch den Stillstand der +Front und die von nun an entgegengesetzte (negative) Propagationsrichtung bzgl. der -Front ausgezeichnet. Ab dieser ist das System absolut instabil. Bei weiterer Entfernung vom Onset ändert die Frontgeschwindigkeit  $v_+$  nun erneut ihr Vorzeichen (nun von - nach +), um wieder in gleicher (positiver) Richtung wie die -Front zu propagieren ( $\epsilon_{c-a} \approx 0.48$ ). Das System befindet sich nun erneut im Bereich konvektiver Instabilität (oberhalb der orangefarbenen Kurve).

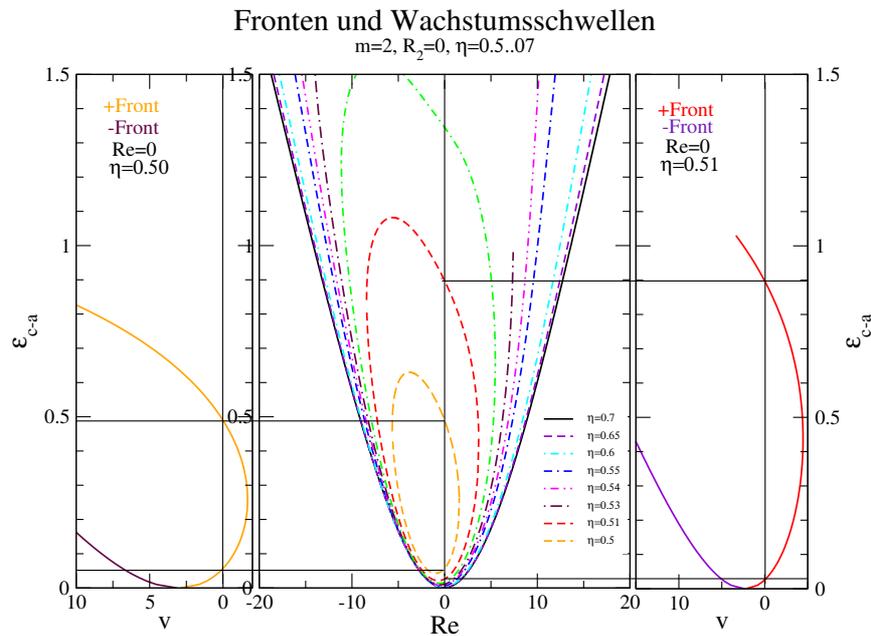


Abbildung 5.11: Zusammenhang von Frontpropagation  $v_{\pm}$  und Stabilitätsschwellen  $\epsilon_{c-a}$  bei L2-SPI als Funktion des Durchflusses  $Re$  bei Variation von  $R_2$ ;  $\eta = 0.5$

## 5.6 Resumé

Nach einer Einführung in die Theorie der Frontpropagation wurden diese, analog der konvektiv-instabilen Stabilitätsschwellen mittels Ginzburg-Landau-Näherung und den linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen berechnet. Abb. 5.2 und 5.3 zeigen die stark eingeschränkte Gültigkeit der Ginzburg-Landau-Näherung für L2-SPI. Anders als bei TVF und 1-SPI existieren bei 2-SPI Parameterbereiche, in denen sich mit zunehmender Entfernung vom kritischen Punkt das Vorzeichen der Geschwindigkeit einer der beiden Fronten mit wachsendem Kontrollparameter **mindestens zweimal** ändert (Abb. 5.5 und 5.6). Diese zusätzliche Nullstelle stellt gerade den im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Übergang vom absolut in den konvektiv-instabilen Bereich bei wachsendem Kontrollparameter  $R_1$  dar (vgl. Abb. 5.11). Somit stellt das Vorzeichen  $sign(v_+v_-)$  des Produkts der beiden Frontgeschwindigkeiten im Laborsystem eine alternative und geeignetere Klassifizierung der verschiedenen Stabilitätsbereiche dar.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Diese Arbeit befaßt sich mit der linearen Analyse von Störungen und der Untersuchung leicht überkritischer Kontrollparameter im Taylor-Couette System insbesondere für L2-SPI. Für den hier betrachteten Fall mit axial periodischen Randbedingungen besitzt das System drei wichtige Kontrollparameter: die Reynoldszahlen  $R_1, R_2$  von innerem- und äußerem Zylinder und den von außen auferlegten, axialen Durchfluss  $Re$ .

Untersucht wurden primäre Übergänge des Systems aus dem Grundzustand hin zu axial periodischen Strukturen. Konkret wurden Taylor-Wirbel und Spiralwirbel betrachtet. Während Taylor-Wirbel geschlossene rotationssymmetrische nichtpropagierende Wirbel darstellen, handelt es sich bei SPI um azimuthal wandernde Strukturen die einer raumzeitlichen Gleitsymmetrie genügen. SPI treten als spiegelsymmetrisch entartete links- und rechtshändige Spiralen auf, die durch Spiegelung für  $z = \text{const.}$  überführt werden können. Zur Berechnung der kritischen Instabilitäten wurden die linearisierten NSE in axialer und azimuthaler Richtung nach ebenen Wellen mit der axialen (azimutalen) Wellenzahl  $k$  ( $m$ ) entwickelt.

Im ersten Teil der Arbeit wurden zahlreiche lineare Schwellen ermittelt. Aufgrund der Symmetrien der betrachteten Strukturen läßt sich der zu untersuchende Parameterbereich deutlich einschränken.

Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit der Betrachtung von leicht überkritischen Kontrollparametern. Hierzu wurden die Feldgleichungen in der Nähe der kritischen Werte für kleine Amplituden entwickelt. Die so erhaltenen Amplitudengleichungen beschreiben die zeitliche und räumliche Dynamik dieser Amplituden. Der entscheidende und wichtigste Unterschied im Vergleich zum ersten Teil besteht darin, dass im überkritischen Bereich ein ganzes Band wachstumsfähiger Moden existiert und es somit zur Ausbildung von lokalisierten Wellenpaketen kommen kann, dessen Schwerpunkt sich mit einer Gruppengeschwindigkeit fortbewegt. Dies legt die Einführung verschiedener Stabilitätsbegriffe nahe, nämlich stabil, konvektiv instabil und absolut instabil.

Vornehmlich wurden hierbei 2-SPI mit der azimuthaler Wellenzahl  $M = \pm 2$  bei einem

Radienverhältnis  $\eta = 0.5$  untersucht. Als Grundlage der Berechnungen dienten sowohl die *Ginzburg-Landau-Näherung*, wie auch eine Implementierung der *linearisierten NSE*.

Wichtige Erkenntnisse zeigten sich einerseits in den Koeffizienten der linearen Terme der Ginzburg-Landau-Gleichung. Insbesondere bei Berechnung der Koeffizienten bzgl. des Durchflusses traten Sprünge auf. Diese konnten letztendlich auf eine bei diesen Parametern vorhandene komplexere Struktur der Eigenwertfläche und eine daraus resultierende Aufspaltung der marginalen Kurven zurückgeführt werden. Abhängig von den jeweiligen Parametern traten 'Inseln' wachstumsfähiger Moden auf. Diese resultieren aus der Existenz eines lokalen Maximums der marginalen Stabilitätsfläche für 2-SPI und unterscheiden sich somit deutlich von TVF und 1-SPI, die in früheren Arbeiten untersucht wurden.

Als Folge dieser Aufspaltung ergaben sich ebenfalls 'Sprünge' in den konvektiven Stabilitätsschwellen  $R_{1c}$  und es konnte eine im Bezug auf 2-SPI eingeschränkte Gültigkeit der Ginzburg-Landau-Näherung nachgewiesen werden. Diese und vielmehr noch die Übereinstimmung der beiden hier verwendeten Verfahren ist dabei sehr stark von den jeweils gewählten Parametern abhängig.

Hieraus resultiert ein bislang noch nicht beobachtetes Verhalten bezüglich des Bifurkationsverhaltens aus dem Grundzustand. Die Aufspaltung bedingt, dass es Parameterbereiche gibt, für die abhängig von der Wellenzahlen einzelne Moden mit Zunahme des Kontrollparameters  $R_1$  zunächst wachstumsfähig sind, dann aber weggedämpft werden, um schließlich bei noch größeren  $R_1$  erneut wachstumsfähig zu werden. An jedem dieser drei  $\gamma = 0$  Punkte sollte eine Lösung herausbifurkieren, deren Stabilität allerdings im Rahmen der linearen Analyse der Störung des Grundzustandes nicht festzustellen ist. So etwas wurde bislang für eine 'einfache' Bifurkation aus dem Grundzustand noch nicht beobachtet und bedarf noch weiterer Untersuchungen insbesondere durch Simulation der vollen nichtlinearen Gleichungen.

Bei Untersuchungen der Frontpropagationen konnten Frontgeschwindigkeiten ermittelt werden, die ihr Vorzeichen bei Betrachtung im Laborsystem mit wachsendem Kontrollparameter zweimal wechselten. Ebenso traten aber auch Fronten auf, deren Geschwindigkeiten keinen Vorzeichenwechsel besitzen. Da gerade das Produkt der Vorzeichen der Frontgeschwindigkeiten beider Fronten eines Wellenpaketes ausschlaggebend für den jeweiligen Stabilitätsbereich ist, mußte auch hier etwas Neues auftreten. So konnte im Bezug auf die konvektiv-instabilen Stabilitätsschwellen  $R_{1c-a}$  ein neues und ungewohntes Verhalten bei verschiedenen Parameterkombinationen gefunden werden. Es wurden sowohl Inseln, d.h. geschlossene Bereiche absoluter Instabilität gefunden, als auch Bereiche, in denen die L2-SPI für beliebig überkritische Werte im Zustand der konvektiven Instabilität verharrt. Dies beruht darauf, dass ein zweiter Sattelpunkt auftritt. Dieser erfüllt alle numerisch an ihn gestellten Schwellenbedingungen, dessen Minima und Maxima in Real- und Imaginärteil der komplexen Wellenzahl  $Q = k - iK$  gerade bzgl. des ersten Sattels vertauscht sind. Hieraus ergeben sich Parameterbereiche, in denen das System bei wachsendem Kontrollparameter der Reihe nach absolut stabil, konvektiv instabil, absolut instabil und schließlich erneut konvektiv instabil ist. Andererseits existieren aber auch Parametersätze, für die das System den Bereich absoluter Instabilität überhaupt nicht erreicht. Ausschlaggebend

für die absolute Instabilität des Systems ist die Tatsache, dass die zugehörigen Frontgeschwindigkeiten unterschiedliche Vorzeichen besitzen. Innerhalb dieser Bereiche wurde eine Abhängigkeit mit den Parametern  $\eta$ ,  $R_2$ ,  $Re$  ermittelt.

Aufbauend auf dieser Arbeit ist künftig die Untersuchung der hier gefundenen Aufspaltung der marginalen Kurven mittels den vollen Nichtlinearen Gleichungen von Interesse. Denn im Gegensatz zu den glatten marginalen Stabilitätsflächen für TVF und 1-SPI tritt in der marginalen Stabilitätsfläche der 2-SPI ein lokales Maximum, ein 'Gipfel' auf. Besonderes Aufmerksamkeit kommt hierbei dem Bifurkationsverhalten der Amplituden im Existenzbereich mehrerer marginaler Kurven zu.



# Anhang

## Mathematisch numerische Verfahren

### Shooting-Verfahren

Randwertprobleme *RWP* stellen eine allgemeinere Formulierung von Anfangswertproblemen *AWP* dar. Hierbei wird eine Lösung  $y(x)$  eines  $n$  dimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (mit  $n$  Randbedingungen)

$$y' = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

gesucht. Diese soll dabei Randbedingungen  $n_1$  und  $n_2$  auf zwei verschiedenen Rändern  $x_0$  und  $x_1$  erfüllen (mit  $n = n_1 + n_2$ ):

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1 y(x_0) = x_0, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 y(x_1) = y_1$$

(wobei  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 \in \mathbb{R}_{n \times n}$  und  $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ )

Die Idee beim einfachen *Schießverfahren* besteht nun darin ein  $y$  zu suchen, das das Anfangswertproblem

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1 y(x_0) = y_0, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_2 y'(x_0) = \hat{y}_1$$

für ein beliebiges  $\hat{y}_1 \in \mathbb{R}$  und  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_2 \in \mathbb{R}_{n \times n}$  an einem der beiden Ränder, z.B. am Äußeren löst. Hieraus ergibt sich die Lösung als Funktion des Parameters  $\hat{y}_1$  womit sich der entsprechende Wert  $y(x_1)$  am äußeren Rand  $x_1$  in Abhängigkeit von  $\hat{y}_1$  angeben läßt. Das Problem ist somit auf das Auffinden der Nullstelle  $y(x_1, \hat{y}_1) - y_1 = 0$  beschränkt. Das Shooting-Verfahren reduziert das *RWP* auf ein *AWP* und ein Nullstellenproblem.

Das sich so ergebende gewöhnliche Differentialgleichungssystem der  $n_2$  linear unabhängigen Startvektoren wird mittels eines *Runge-Kutta-Verfahrens* aufintegriert. Im hier vorliegen-

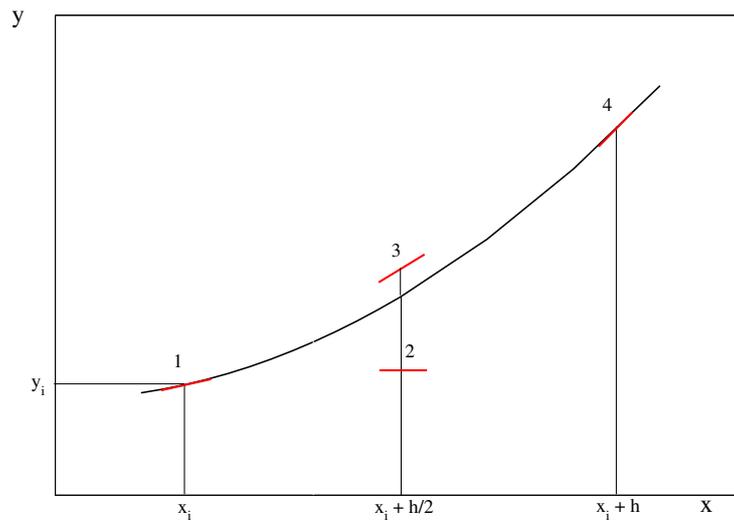


Abbildung 6.1: Runge-Kutta-Verfahren 4ter Ordnung. Es sind zusätzlich die 4 Stützstellen eingezeichnet, an denen die Ableitungen  $k_i$  berechnet werden, wobei 2 und 3 jeweils mit doppeltem Gewicht eingehen.

den Fall handelt es sich um ein Verfahren 4. Ordnung, für das gilt:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
 k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}
 \end{aligned}$$

Hierbei liegt der Vorteil darin, dass bei der Berechnung von  $y_{n+1}$  die Ableitung  $y' = f(x, y)$  pro Iterationsschritt nicht nur an einer, sondern gleich an 4 verschiedenen Stützstellen ausgewertet wird und in das Ergebnis eingeht (vgl. Abb. 6.1). Zudem werden die verschiedenen Stützstellen noch unterschiedlich stark gewichtet, was eine deutliche Minderung von Diskretisierungsfehlern gegenüber anderen Verfahren bedingt.

Der Integrationsanfang ist durch einen sogenannten Startvektor gegeben, der die Randbe-

dingungen bei  $x_0$  erfüllt.

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{pmatrix}$$

Die Aufintegration ergibt nun einen Wert für  $y(x_1)$ . Durch Aufspaltung des obigen Startvektors<sup>1</sup> gemäß

$$y(x_0) = x_{0,1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{0,2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{0,3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_{0,1}y^{(1)} + x_{0,2}y^{(2)} + x_{0,3}y^{(3)}$$

sieht man, dass man die Integration auch für jeden Einheitsvektor separat durchführen kann, woraus sich am äußeren Rand  $x_1$  die folgende Bedingung ergibt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & y_1^{(3)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & y_2^{(3)} \\ y_3^{(1)} & y_3^{(2)} & y_3^{(3)} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \Big|_{x=x_0} \cdot \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die  $x_{0,i}$ 's stellen somit eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems dar, so dass die Bestimmungsgleichung

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$$

lauten muss. Das daraus erhaltene Charakteristische Polynom kann nun mittels eines Nullstellenfinders, wie etwa dem *Newton-Raphson-Verfahren*, gelöst werden.

## Newton-Raphson-Verfahren

Das *Newton-Raphson-Verfahren* ist ein Verfahren um die Nullstelle einer Funktion zu finden, ein Problem, das in dieser Arbeit etwa aus der Lösbarkeitsbedingung (2.30) oder der Sattelpunktsbedingung (4.6),(4.8) folgt.

Im Allgemeinen handelt es sich um eine Funktion  $\mathbf{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ , bei der die Nullstellen

---

<sup>1</sup> $y_i^{(j)}$  entspricht der  $i$ -ten Komponente des  $j$ -ten Startvektors

$x_i^{(j)} \in \mathbb{C}, i = 1..N$ , für welche in der  $i$ -ten Komponente  $F_i(x_1^{(j)} \dots x_N^{(j)}) = 0$  gilt, gesucht werden. Hierzu betrachtet man nun die Taylor-Reihe der zugehörigen Funktion:

$$F_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k}_{\mathbf{J}\delta\mathbf{x}} + O((\delta\mathbf{x})^2)$$

$$\iff \mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \underline{\underline{\mathbf{J}}}\delta\mathbf{x} + O((\delta\mathbf{x})^2)$$

Um nun die Forderung zu erfüllen, dass der neue Wert  $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$  näher an Null liegt, als der alte, setzt man diesen selbst auf Null  $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = 0$ , woraus sich unmittelbar die Beziehung

$$F(\mathbf{x}) = -\underline{\underline{\mathbf{J}}}\delta\mathbf{x}$$

$$\implies \mathbf{x}_{new} = \mathbf{x}_{old} + \delta\mathbf{x}$$

Dies ist nun ein iteratives Verfahren zur Berechnung der Nullstelle. Wichtig ist noch zu erwähnen, dass es unter Umständen sehr sensitiv von dem entsprechenden Startwert abhängen kann, welche Nullstelle man findet, bzw. ob überhaupt eine solche auffindbar ist.

## Sattelpunktsanalyse

Die sogenannte Sattelpunktsanalyse ist ein Verfahren zur approximativen Berechnung von Integralen der Form

$$I(\xi) = \int_C e^{\xi F(z)} dz \quad (6.1)$$

mit der Einschränkung, dass  $\xi$  'gross' und positiv ist.  $C$  stellt dabei einen Integrationsweg in der komplexen Ebene dar, wobei dessen Wegenden keinen signifikanten Beitrag zum Integral besitzen sollen.

Das Verfahren basiert auf der Idee, eben gerade diesen Integrationsweg  $C$ , so umzubiegen, dass der wesentliche Beitrag des Integrals auf einem möglichst kleinen Teil des Integrationswegs zu liegen kommt:

- bei reellen Funktionen entspräche dies dem Bereich um das Maximum
- im Fall komplexer Funktionen ergibt sich der Sachverhalt etwas schwieriger wie folgt:

Voraussetzungen seien:

$$F(z) = u + iv \quad \text{analytisch} \quad \text{mit} \quad z = x + iy \quad (6.2)$$

Mittels der *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (CRDGL)* für analytische Funktionen:

$$a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad b) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.3)$$

folgt, dass abgesehen von Singularitäten, weder  $u$ , noch  $v$  ein Maximum besitzen können, da gilt:

$$(mit(6.3)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.4)$$

$$\iff \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (6.5)$$

(analog erhält man auch  $\nabla^2 v = 0$ .) Somit ergibt sich aus (6.5) unmittelbar die Bedingung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0 \iff \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0 \quad (6.6)$$

Ein Punkt auf der Oberfläche  $u(x, y)$ , der sowohl die Extremalbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.7)$$

erfüllt (somit ist dieser ein 'flacher Punkt'), als auch der Gleichung (6.5) genügt muss also ein *Sattelpunkt* sein. Indem man (6.7) in (6.5) einsetzt erkennt man, dass ein Sattelpunkt der Funktion  $u(x, y)$ , ebenso einen der Funktion  $v(x, y)$  darstellt.

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.8)$$

$$\implies F'(z) = 0 \quad (6.9)$$

Approximativ gilt in der Nähe des Sattelpunktes  $z_s$

$$F(z) \approx F(z_s) + O((z - z_s)^2) \quad (6.10)$$

$$(6.1) \implies I(\xi) = \int_C e^{\xi F(z)} dz \approx I(\xi) = e^{\xi F(z_s)} \int_{C'} dz \quad (6.11)$$

Falls eine lineare Näherung wie in (6.11) nicht ausreichend ist, so müssen evtl. noch quadratische Terme (oder weitere höhere Ordnungen) in die Näherung (6.10) mit berücksichtigt werden. Das verbleibende Integral  $\int_{C'} dz$  ergibt für den nun durch den Sattelpunkt verlaufenden Integrationsweg  $C'$  einen konstanten Wert und ist somit unproblematisch.



# Literaturverzeichnis

## Allgemeine Literatur zur Hydrodynamik und nicht-linearen Systemen

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik - Hydrodynamik*, Bd. VI (Akademie Verlag, 1991).
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Physikalische Kinetik*, Akademie-Verlag Berlin (1983)
- [3] S. Chandrasekhar: *The stability of spiral flow between rotating cylinders*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A265**, 188 (1962)
- [4] A. J. Chorin: *Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations*, Math. Comp. **22**, 745 (1968)
- [5] M. C. Cross: *Wave-number selection by soft boundaries near threshold*, Phys. Rev. **A29**, 291 (1983)
- [6] M. C. Cross: *Structure of nonlinear travelling waves in finite geometries*, Phys. Rev. **A38**, 3593 (1987)
- [7] W. Eckhaus: "Studies in Nonlinear Stability Theory" , Springer-Verlag (1965)

## Literatur zum Taylor-Couette-System

- [8] R. Tagg, *The Couette-Taylor Problem Nonlinear Science Today*, 4 2 (Springer, 1994).
- [9] M. Lücke and D. Roth, *Structure and dynamics of Taylor vortex flow and the effect of subcritical driving ramps*, Z. Phys. B **78**, 147 (1990). They used  $\epsilon_{LR} = \frac{\Omega}{\Omega_c} - 1$  as control parameter.
- [10] C. Hoffmann, *Stationäre und zeitabhängige Strömungsmuster im Taylor-Couette-System - Taylorwirbel, Spiralen und modulierte Strukturen*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, unveröffentlicht (1998)

- [11] C. Hoffmann, *Struktur, Dynamik und Bifurkationsverhalten von Spiralwirbeln im Taylor Couette System mit und ohne Durchfluss*, Doktorarbeit, Universität des Saarlandes, unveröffentlicht (2005)
- [12] C. Hoffmann, M. Lücke, and A. Pinter *Spiral vortices and Taylor vortices in the annulus between rotating cylinders and the effect of the axial flow*, Phys. Rev. E **69**, 056309 (2004)
- [13] G. I. Taylor, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. **223**, 289 (1923)
- [14] M. Lücke: *Strömung zwischen konzentrischen rotierenden Zylindern*, Ferienkurs Kernforschungsanlage Jülich (1983)
- [15] M. Lücke: Persönliche Mitteilung
- [16] C. D. Andereck, R. Dickman, H. L. Swinney, *New flows in a circular Couette system with co-rotating cylinders*, Phys. Fluids, **26** 6 (1983)
- [17] C. D. Andereck, S. S. Liu and H. L. Swinney, *Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders*, J. Fluid Mech. **164**, 155-183 (1986).
- [18] J. Langenberg, G. Pfister, and J. Abshagen, *Standing waves in flow between finite counterrotating cylinders*, Phys. Rev. E **68**, 056308 (2003).

## Literatur zur linearen Stabilitätsanalyse

- [19] W. F. Langford, R. Tagg, E. Kostelich, H. L. Swinney, and M. Golubitsky, *Primary instabilities and bicriticality in flow between counter-rotating cylinders*, Phys. Fluids, **31**, 776 (1988).
- [20] M. A. Dominguez-Lerma, G. Ahlers, and D. S. Cannell, *Marginal Stability Curve and Linear Growth Rate for Rotating Couette-Taylor Flow and Rayleigh-Bénard Convection*, Phys. Fluids **27**, 856 (1984).
- [21] M. A. Dominguez-Lerma: *Stability Boundary and Wavenumber Selection for Taylor Vortex Flow*, Dissertation, University of California (1986)
- [22] G. Ahlers, D. S. Cannell, M. A. Dominguez-Lerma, R. Heinrichs: *Wavenumber Selection and Eckhaus Instability in Couette-Taylor Flow* Physica **D23**, 202 (1986)
- [23] K. C. Chung, K. N. Astill: *Hydrodynamic instability of viscous flow between rotating coaxial cylinders with fully developed axial flow*, J. Fluid Mech. **81**, 641 (1977)
- [24] D. S. Cannell, M. A. Dominguez-Lerma, G. Ahlers: *Experiments on Wave Number Selection in Rotating Couette-Flow*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1365 (1983)

## Literatur zur numerischen Berechnung

- [25] J. Stoer and R. Bulirsch, *Numerische Mathematik 2*, (Springer, Berlin, 1990).
- [26] G. P. Williams: *Numerical integration of the three-dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flow*, J. Fluid Mech. **37**, 727 (1985)

## Literatur zu Amplitudengleichung

- [27] R. Graham and J. A. Domaradzki, *Local amplitude equation of Taylor vortices and its boundary condition*, Phys. Rev. A **26**, 1572 (1982).
- [28] A. Recktenwald, *Berechnung der linearen und nichtlinearen Koeffizienten der komplexen Amplitudengleichung für das Taylor-Couette-System mit Durchfluss*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, unveröffentlicht (1992)
- [29] A. Recktenwald, M. Lücke, and H. W. Müller *Taylor vortex formation in axial through flow: Linear and weakly nonlinear analysis*, Phys. Rev. E **48**, 6 (1993)
- [30] A. Pinter, *Spiralwirbel im Taylor-Couette-System*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, unveröffentlicht (2001)

## Literatur zu Stabilitätsschwellen und Frontpropagationen

- [31] T. Tsameret and V. Steinberg, *Convective vs. absolute instability in Couette-Taylor Flow with an axial flow*, Europhys. Lett. **14**, 331 (1991); Phys. Rev. Lett. **67**, 3392 (1991).
- [32] Alexander Pinter, *Diplomarbeit*, Spiralwirbel im Taylor Couette System Universität des Saarlandes, unveröffentlicht (1986).
- [33] T. Tsameret and V. Steinberg, *Absolute and Convective Instabilities and Noise-Sustained Structures in the Couette-Taylor system with an axial Flow. I*, preprint (1993).
- [34] M. Lücke, M. Mihelcic, K. Wingerath: *Front propagation and pattern of Taylor vortices growing into unstable circular Couette flow*, Phys. Rev. **A31**, 396 (1985)
- [35] M. Lücke, M. Mihelcic, B. Kowalski, K. Wingerath: *Structure Formation by Propagating Fronts*, The Physics of Structure Formation, W. Güttinger & G. Dangelmayr (Hrsg.), 97 Springer-Verlag (1987)

- [36] K. Bühler, *Ein Beitrag zum Stabilitätsverhalten der Zylinderspaltströmung mit Rotation und Durchfluss*, Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen, 32/82 Karlsruhe; ZAMM **64**, 180 (1984).
- [37] R. Tagg, W .S. Edwards, and H. L. Swinney, *Convective versus absolute instabilities in flow between counterrotating cylinders*, Phys. Rev. A **42**, 831 (1990).

## Sonstige Quellen

- [38] Mit freundlicher Genehmigung des MAPLE-Codes von Christian Hoffmann